易图的数学结构

董光璧著

上海人民出版社

如果这种真理不总是不断地重新创造出来，它就会完全被我们遗忘掉。

——阿尔伯特·爱因斯坦

序

《周易》是一部奇异的古典，其中包含《经》、《传》两个部分。《周易》的《经》和《传》不是同一时期的作品，但自汉初以来，《周易》的《经》和《传》已融为一体。在思想史上发生重要作用的，是《经》和《传》的总体。近年发现了汉初的帛书《周易》，其编排次第以及内容与通行本不同。但是，应该承认，在历史上发生广泛影响的，不是帛书本，而是汉儒传授的通行本。

中国古代哲学典籍大多没有形式上的系统。《周易》的八卦、六十四卦，却形成了一个独特的系统，既不可能是六十三，也不可能是六十五。《周易》八卦、六十四卦，都用符号来表示一定的意义，这是所谓"象"。八卦、六十四卦以及三百八十四爻之间有一定的数理关系，这即所谓"数"。《周易》包含"象数之学"。汉代易学家喜讲象数，有时陷于牵强附会，支离烦琐。到宋代，邵雍提出自己的象数学说，自称为"先天之学"。他虽然接受了道教的一些观点，实际上大部分是他自己的创见。清代学者进行历史考据，论证"邵《易》非古"。邵氏之说诚然"非古"，但不失为一种新说，在历史上也有其一定的意义。

《周易》的象数之学与中国古代数学（算学）的关系如何？象数之学中表现了那些数学原理？象数之学是否反映了一些客观规律？这些都是应该深入研究的课题。近年以来，许多学者从事这方面的研究，已经取得一些成就。但是，研究这些课题，必须具备丰富的现代科学知识，又具备一定的历史知识，才能做到持之有故、言之成理。董光壁同志从事自然科学史研究，熟悉现代数学和物理学，近来运用现代科学知识对于《周易》的象数之学进行科学的考察，写成《易图的数学结构》一书，我看了以后，觉得这确实是一个有价值的尝试，对于《周易》古学中的数理奥秘，确实是有所发现。这是近年研究《周易》的科学内容以及《周易》与古代自然科学关系的新成果。我看了书稿之后非常高兴，于是把自已的一些感想写出来，作为弁言。

张岱年

1985年1月序于北京大学

目　　录

前言……………………………………………………………………1

第一章　易学中的易图……………………………………………3

　第一节　《周易》大意……………………………………………3

　第二节　易学的源流……………………………………………7

　第三节　易学学派………………………………………………22

第二章　易图对称性………………………………………………27

　第一节　易图之排布……………………………………………27

　第二节　卦之错综………………………………………………39

　第三节　错综对称性……………………………………………44

第三章　易图的数学解……………………………………………50

　第一节　二进制解释……………………………………………50

　第二节　组合解释………………………………………………57

　第三节　代数解释………………………………………………63

　第四节　几何解释………………………………………………67

　第五节　矩阵解释………………………………………………73

第四章　易对称群…………………………………………………82

　第一节　群论的基本概念………………………………………82

第二节　生成群……………………………………85
第三节　几何对称群…………………………………87
第四节　阴阳反演对称群……………………………90
第五章　阴阳定律……………………………………96
第一节　《周易》的变化图式………………………96
第二节　阴阳守恒律………………………………100
第三节　阴阳平衡律………………………………101
第四节　阴阳置换律………………………………102
第六章　易同余式……………………………………104
第一节　《周易》筮法………………………………104
第二节　易同余式……………………………………108
第七章　《周易》的科学意义…………………………112
第一节　作为前科学的《周易》……………………113
第二节　从《周易》到“大衍求一术”………………127
第三节　论真理的再发现……………………………132

前　言

《周易》几乎可以说是中国最早的古典。它是符号体系和概念体系的统一体。自东周以来，历代学者对于它的解释和发挥，形成了源远流长的易学。在易学的研究中，《周易》的符号体系和概念体系都得到了发展。但是，长期以来，人们主要致力于其哲学含义的阐发。自德国数学家、哲学家莱布尼茨发现易图与二进制数表的一致性以后，人们逐渐增长了探索潜藏在《周易》中的科学道理的兴趣。这样，在易学研究中，除了已有的对《周易》作哲学研究的象数派和义理派之外，又出现了对它进行科学研究的数理派。对于《周易》进行数理科学研究的学者几乎都是在分析易图的基础上进行的。在这本小册子里，作者试图从数理科学的角度概述易学中易图研究的发展，并运用现代数学手段尽可能地在前人研究的基础上对易图的对称性和数学解作系统的阐述。主旨在于揭示易图的数学结构，虽然凡反映出数学思想之处都作了肯定，但并没有进行深入讨论。

通过对易图的数学研究可以看出，易学不仅蕴含着哲理，其符号体系中也包含有严格的数学逻辑性。正如莱布尼茨所

说，“易图是留传于宇宙间科学中之最古纪念物”；也如梁启超所说，“易学也可以叫数理的哲学”。

在易学之中所蕴含的真理，需要人们随着时代的前进不断地去发现，否则它将会被忘记。作者带着自己的尝试之作加入易学研究的行列，以结识学友。

作者

1984年8月于北京双榆树

第一章　易学中的易图

本章试图通过对易学发展史的粗略介绍，阐明易学中符号体系（易图）和概念体系的相互关系，叙述具有数学意义的易图的发展，而不是易图的全貌。

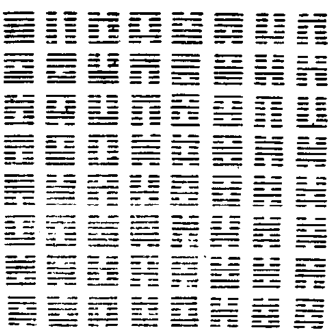
首先介绍《周易》大意，强调它的符号体系。次为易学源流：作为筮书的古《易》，由于在东周时期发展出《易传》而成为哲学著作；汉代易学以象取义，还不能算数学研究；宋代的邵雍创作易图，朱熹传之，为易学的数学研究奠定了基础；明、清学者阐发易图错综对称性，已显数学研究的端倪；莱布尼茨的易图二进制解纯是数学研究，清以后的学者继之，兴起了易学的数理研究。最后，关于易学学派，除象数派和义理派之外，还应当承认有一个数理学派存在并发展着。

第一节　《周易》大意

《周易》是一本阐述变化之理的中国古典。它是由符号集及其对应的概念系统组成的一个整体。流行的《周易》一书包括《经》和《传》两部分。《易经》和《易传》都非一人一时之作，而

是在流传中形成的集体著作。前者产生于商周之际，后者成于东周，后者是对前者的解释和发挥。

《易经》的符号体系是由代表“阴”的“--”和代表“阳”的“—”两种基本符号，按六个一组排列组合成的六十四组符号的集合。每个符号组都称为“卦”，并有一个特定的名称。组成卦的卦画称为“爻”，“--”称阴爻，“—”称阳爻，依其在卦中的位置，自下而上称初爻、二爻、三爻、四爻、五爻、上爻。六十四卦按一定的次序排列形成一个体系，如图 1.1.1 所示。



乾	坤	屯	蒙	需	讼	师	比
小畜	履	泰	否	同人	大有	谦	豫
随	蛊	临	观	噬嗑	贲	剥	复
无妄	大畜	颐	大过	坎	离	咸	恒
遁	大壮	晋	明夷	家人	睽	蹇	解
损	益	夬	姤	萃	升	困	井
革	鼎	震	艮	渐	归妹	丰	旅
巽	兑	涣	节	中孚	小过	既济	未济

图 **1.1.1** 《周易》六十四卦序

《易经》的经文由“彖辞”和“象辞”组成。彖辞阐述每卦全体的意义，亦称“卦辞”。象辞说明各爻的意义，亦称“爻辞”。

《易经》六十四卦依序排列。每卦先列卦形（符号），次列卦名，再次列卦辞。每爻先列爻题，次列爻辞。爻题都是两个字，其中一个字代表爻在卦中的位置，另一个字代表爻的阴阳属性，阴爻用“六”，阳爻用“九”。

《易经》六十四卦的卦辞和爻辞共四千九百余字。先秦时

代统称卦辞和爻辞为“繇”，现在亦称“筮辞”。

《易传》包括十篇：《彖传》上、下两篇，《象传》上、下两篇，《系辞》上、下两篇，《文言》、《说卦》、《序卦》和《杂卦》各一篇，旧称《十翼》。《彖传》是解释卦辞的；《象传》是解释爻辞的；《系辞》是《易经》通论，说明它的演成和内容以及占筮方法；《文言》专门解释“乾”、“坤”二卦的意义；《说卦》说明八卦是六十四卦之源以及八卦的意义；《序卦》说明六十四卦的顺序；《杂卦》说明六十四卦两两对立之理。

《周易》六十四卦的卦形是由八卦相重而得。所谓八卦，就是由阴“--”和阳“—”两种符号，按三个一组排列组合而成的八组符号的集合。八个符号组分别象征天、地、火、水、风、雷、山、泽八种自然事物，相应赋予乾、坤、离、坎、巽、震、艮、兑八个卦名。图 1.1.2 列出八卦的符号和名称以及它们相应的象征。

乾	坤	震	巽	坎	离	艮	兑
☰	☷	☳	☴	☵	☲	☶	☱
天	地	雷	风	水	火	山	泽

图 1.1.2 八卦表

六十四卦为八卦相重而成，故每卦包括上下两部分，其上为外，古称“悔”，其下为内，古称“贞”。按《易经》占筮法所得之卦叫“本卦”古亦称“贞”，所变之卦叫“之卦”古亦称“悔”。图 1.1.3 为按上下卦八种象征排布的六十四卦表。

地地	山地	水地	风地	雷地	火地	泽地	天地
地山	山山	水山	风山	雷山	火山	泽山	天山
地水	山水	水水	风水	雷水	火水	泽水	天水
地风	山风	水风	风风	雷风	火风	泽风	天风
地雷	山雷	水雷	风雷	雷雷	火雷	泽雷	天雷
地火	山火	水火	风火	雷火	火火	泽火	天火
地泽	山泽	水泽	风泽	雷泽	火泽	泽泽	天泽
地天	山天	水天	风天	雷天	火天	泽天	天天

图 1.1.3 重卦表

《周易》的基本思想，是用“阴”和“阳”这对最基本的范畴说明宇宙间的一切变化和发展都根源于两种对立的力量在对抗中的消长。阴阳这对范畴是对一切对立的事物和现象的高度概括。例如，自然界的天和地、山和泽、水和火、风和雷，人的气质的刚和柔，情绪的喜怒、哀乐，人事的吉凶、祸福，事物

的表里、虚实等等。这些对立的事物和现象的相反相成、相互转化构成宇宙间一切变化和发展。在逻辑体系上是由阴阳两种符号的排列组合表示事物和现象的可能状态的分类。八卦表示事物和现象的八种可能的基本类型。八卦相重而形成六十四种可能的状态。卦的顺序的先后承接表达事物的因果关系，卦的对称性表达事物之间的共性。卦爻从初到上反映一个事物的发展过程。这样，《周易》就给出了一个朴素的、具有一定逻辑功能的关于事物变化发展的思想体系。

第二节　易学的源流

《易经》的符号和文字渊源久远。《系辞下》说："古者庖犧氏之王天下也。仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。"庖犧即伏羲氏，传说中的远古时代的历史人物，他是大约在公元前五万年相当于北京原人时代中华祖先某个原始人部落的首领。

在考古文物中似有卦画的遗痕。例如，在大约距今万年的陶片上有些刻画貌似卦画；在大约距今五千年的陶片上已有明显的八卦乾卦和坤卦那样的刻痕。这些是否可以视为八卦起源的证物还有待研究，因为它们只是貌似八卦的个别卦形，至今也并未发现完整的八卦符号体系。

关于卦画的起源有两种观点：一种是文字说，另一种是数码说。《易纬·乾凿度》说："☰，古天字。☷，古地字。☲，古火

字。☵，古水字。☴，古风字。☳，古雷字。☶，古山字。☱，古泽字。”这样说来，上述仰韶文化陶片上的卦形刻画就是古文字。近人又提出数码说。①在甲骨文和铭文中，常常出现三个数字一组和六个数字一组又不与它辞连接的古文字，据此有人认为它是易卦的叙述。三个数字一组的是单卦，六个数字一组的是重卦。例如，安阳四盘磨出土的卜骨有“七五七六六六曰魁”，“七八七六七六曰隗”。如果按奇数为阳爻，偶数为阴爻，就可译为“䷋曰魁”，“䷿曰隗”。魁和隗是卦名，连起来是魁隗，是连山氏的别称。于是有人猜它可能是《连山》易的篇首。

按数码说，卦是从数字表示过渡为爻码表示的。从考古发掘汉墓所获《易经》竹简和帛书，似乎为这种观点提供了证据。长沙马王堆汉墓帛书《周易》的卦序、卦爻辞与流行本多不相同，而且阴爻的符号为“⅃L”。②安徽阜阳双古堆西汉汝阴侯（夏侯灶）墓《周易》竹简三百多片，虽然已破碎残缺太甚，不易属读，但保存完整的三个卦形的阴爻符号都是“∧”，与今本《周易》和马王堆帛书都不同。③因为第一期殷虚甲骨文中“六”写作“∧”，所以说“∧”由六而来，继而演化为“⅃L”，最后写成“--”。

持数码说的没有提及古陶片上的“☰”和“☷”的刻画。考

---

① 张政烺：《试释周初青铜器铭文中的易卦》，载《考古学报》1980年第4期；《帛书〈六十四卦〉跋》，载《文物》1984年第3期。

② “马王堆帛书《六十四卦》书影”，载《文物》1984年第3期。

③ 《阜阳双古堆西汉汝阴侯墓发掘简报》，载《文物》1978年第8期。

虑到这个事实，两说就发生了矛盾。

据先秦典籍记载，筮书不只一种，《连山》、《归藏》和《周易》都是由八卦和六十四卦组成的类似的筮书。《周礼·大卜》记载："大卜掌'三易'之法，一曰《连山》，二曰《归藏》，三曰《周易》。其经卦皆八，其别皆六十有四。"《连山》失传，《归藏》被考伪，后人推测，或说《连山》为神农《易》，《归藏》为黄帝《易》，或说《连山》为夏《易》，《归藏》为商《易》。三说不一，它们究竟是同存的异本还是各有所传承，学界尚未考定。学术界多认为《周易》产生于商周之际。司马迁在《史记·周本纪》中说："文王……其囚羑里，盖益《易》之八卦为六十四卦。"作为传说，《周易》古经的传承谱系如下：

伏羲→神农→黄帝→夏→商→周文王

在东周时代易学第一次有较大的发展，并产生了质的变化。传易学者托名孔子创作《易传》，对古《易经》进行了解释和发挥，把《易经》的卜筮性质转变为哲学。《论语·述而》说："子曰：'加我数年，五十以学《易》，可以无大过矣。'"可见孔子读过《易》。司马迁在《史记·孔子世家》中说："孔子晚而喜《易》，序《彖》、《系》、《象》、《说卦》、《文言》。"班固在《汉书·艺文志》中说："孔氏为之《彖》、《象》、《系辞》、《文言》、《序卦》之属十篇。"汉儒遂谓《十翼》皆孔子所作。实非如此。《易传》着意发挥了《周易》古经关于变化的思想，给出命题："生生之谓易"，"一阴一阳谓之道"，"刚柔相推而生变化"。这些命题把"阴阳"、"道"和《易》联系起来。《易传》的作者们显然是吸取

了道家和阴阳家的思想来解《易》，并发挥儒家的观点。《易传》还描绘了一个八卦宇宙论的宇宙生成、发展的图象。《系辞》上说："易有太极，是生两仪。两仪生四象，四象生八卦。"八卦仿效和摹写天、地、山、泽、水、火、风、雷八种基本自然事物和现象，六十四卦的卦爻体系是囊括自然和人事一切变化的图式。

汉传《周易》有田何系隶书本和费直系篆书本。《汉书·儒林传》说："汉兴，言《易》自淄川田生"；"要言《易》者本之田何"。并说田何之学上溯五传而源于孔子，下传而有施、孟、梁三家。田何是战国末前汉初讲授《周易》的大师。田何易学西汉武帝时立于学官。传田学者沛人施雠、东海人孟喜、琅琊人梁丘贺，这三家西汉宣帝时立于学官。再后为东郡人京房的易学于元帝时也立于学官。《汉书·儒林传》说："费直字长翁，东莱人也，治《易》，……亡章句，徒以《彖》、《象》、《系辞》十篇《文言》解说上下经。"费直易学为民间流传的古文本，比较完整。他的后继者京兆人陈元、扶风人马融、河南人郑众、北海人郑玄、颍川人荀爽并传其易学，流传最广。今流行本《周易》即为费直传本。

西汉后期，焦赣和京房等人把五行学说引入易学，创五行易说。以八卦配五行，用八卦表示方向。震东方，离南方，兑西方，坎北方，叫作四正；巽东南，坤西南，乾西北，艮东东北，叫作四维。这就把《易传》中的八卦方位完整化了。在《易传·说卦》中只讲到：震为东，巽东南，乾西北，坎北方，艮东北，离南方；兑、坤未予明确定向。经汉以后，以八卦表示方向颇流

(a)

(b)

图 1.2.3 (a)唐代二十八宿铜镜拓片
(b)宋代八卦镜拓片

行，考古出土的八卦铜镜就是明证。图 1.2.3～1.2.4 是唐、宋八卦镜的拓片及其八卦方位的重画。看这些图的时候，要知道当时的习惯和现在不同。现在的地图是上为北，下为南，左为西，右为东，而那时的图和现在的图在方位上差 180°，它是上为南，下为北，左为东，右为西。另外这些图应从外向内看，而不如后来的八卦方位图自内向外看。因为拓片不清，所以重新画了对应于铜镜拓片的八卦方位，以便认读。

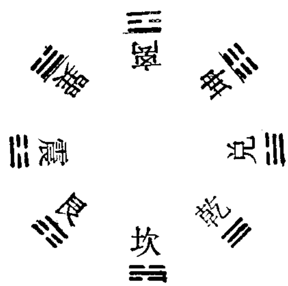


图 1.2.4 唐宋两镜的八卦方位

西汉末年扬雄(前 53—后 18)仿《周易》创《太玄》，也算是对易学的一种极富创造性的发展。他把《周易》的阴阳二元对立观念发展成天地人三元观念。他发展了一种符号系统。以一 -- ---分别代表天地人三才。由这三个符号按四个一组排列组合出八十一组，按一定的顺序排列成系统，称为八十一首。这里的“首”相当《周易》的“卦”。和卦不同，他规定首画顺序为自上而下。每首也都赋予一个名称，代表一定的意义。扬雄的《太玄》八十一首秩序井然，从𝌆(中)、𝌇(周)……到第八十一𝍖(养)。《太玄》的符号系统是三进制计数法。如果以

0 代一，以 1 代--，以 2 代---，那么《太玄》八十一首就是一个三进制连续数列。我们将在第三章第一节中讨论易图二进制解时给出《太玄》符号集的三进制数码的完整译表。

西汉末年谶纬之学流行，发挥《易传·系辞》中“河出图，洛出书，圣人则之”，用神学的神秘主义解释《易经》的起源。在这种神秘易学中萌发了易学的数理研究。东汉末年的郑玄对易学研究有两项有数学意义的发挥。其一是，他对《系辞》中的“天数五，地数五，五位相得而各有合”作了一个解释，认为“天数五”是五个奇数一、三、五、七、九，“地数五”是五个偶数二、四、六、八、十；“五位”是五行的方位；一、二、三、四、五，谓之“生数”，各加五得六、七、八、九、十，谓之“成数”。他以一、六配水，位于北方；以二、七配火，位于南方；以三、八配木位于东方；以四、九配金位于西方；以五、十配土，位于中央。可画为图 1.2.5。

（南）
七、
二

（东）八、三　　五、十　　四、九（西）

一、
六
（北）

图 1.2.5 天地生成数图

郑玄对《易纬·乾凿度》中的“太乙取其数以行九宫，四正四维皆合于十五”作注解。说太帝居九宫之中间者紫宫，八卦神住在八方的八个宫。太乙神按一定的次序巡行九宫。如果

巡九宫的次序以自然数标出，则为图 1.2.6。南宋数学家叫它“纵横图”。此图的任一行或任一列和两条对角线的数字和都是十五。南宋数学家杨辉将其推广为四行、五行、六行、七行、八行。纵横图是特殊的矩阵，即由 1 到 n^2 个自然数排列的 n 阶矩阵，其排布要保证各行、列和主对角线数字和为 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$。所以九宫数是世界上最早的矩阵图。① 因为八卦以卦名示方向，九宫以数示方向。在《黄帝内经》中就有以三、九、七、一、五表示东、南、西、北、中的实例。

四	九	二
三	五	七
八	一	六

图 1.2.6　九宫数图

天地生成数和九宫数自有其数学意义，但至今尚不能从数学上理解它们同易卦符号体系有什么逻辑关系。

汉后的魏、晋、隋、唐各代易学没有本质性的进展。魏王弼(226—249)注《易》渗入老子学说，并以简代繁，取义忘象，使易学趋于抽象。王弼易学东晋时立于学官。晋康伯续王弼注。唐孔颖达作《周易正义》，以王、韩为本，为之作疏，流传甚广。唐李鼎祚著《周易集解》，博采众说，对于传流古注尚有

① 参见钱宝琮主编:《中国数学史》，科学出版社 1964 年版，第 122 页。

功绩。

宋代易学一方面以孔孟学说为依据兼收道、佛思想，发展《周易》中的哲学思想，形成宋、明直至清中叶的理学，另一方面以先天图和河图、洛书解《易》，① 使《周易》的符号体系达到数学意义上的逻辑完美。

旧说先天图源于宋代华山道士陈抟的无极图。近又有人认为创先天图的邵雍(1011—1077)可能借用了华严宗法藏的

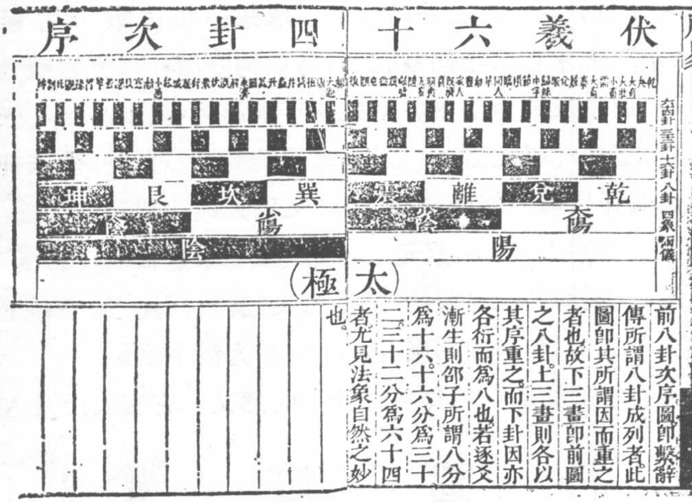
图 1.2.7 伏羲八卦次序(书影)

① 北宋末年易学图说有三派：邵雍代表的先天图派，刘牧代表的河图洛书派，周敦颐代表的太极图派。太极图和易卦图似无关系，亦无数学意义，不拟讨论。

思想。① 先天图实际上是邵雍的伟大的创造，他托名伏羲作伏羲八卦次序、伏羲八卦方位、伏羲六十四卦次序和伏羲六十四卦方位等图。它们蕴含数学意义。此四图南宋朱熹录于所著《周易本义》，才得以传世。邵雍的创造使易图体系化，为对易图进行数理的研究奠定了基础，从而使易学从战国以来的哲理研究中开辟了一条数理研究的新路。图 1.2.7—1.2.10 是刊于朱熹《周易本义》卷首的四个先天图的书影。

图 1.2.8 伏羲八卦方位(书影)

① 华伦莱:《易经与华严宗学说的形成》，载《中国哲学史研究》1984 年第 2 期，第 76—81 页。


伏羲六十四卦次序

六十四卦 三十二卦 十六卦 八卦 四象 兩儀

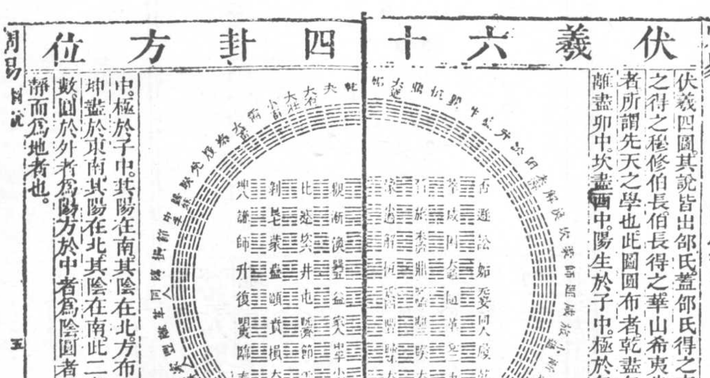
乾 兌 離 震 巽 坎 艮 坤

陽 陰

太極

前八卦次序圖卽繫辭傳所謂八卦成列者此圖卽其所謂因而重之者也故下三畫卽前圖之八卦上三畫則各以其序重之而下卦因亦各衍而爲八也若逐爻漸生則邵子所謂八分爲十六十六分爲三十二三十二分爲六十四者尤見法象自然之妙也。

图 1.2.9 伏羲六十四卦序(书影)


伏羲六十四卦方位

伏羲四圖其說皆出邵氏蓋邵氏得之李之才挺之挺之得之穆修伯長伯長得之華山希夷先生陳摶圖南者所謂先天之學也此圖圓布者乾盡午中坤盡子中離盡卯中坎盡酉中陽生於子中極於午中陰生於午中極於子中其陽在南其陰在北方布者乾始於西北坤盡於東南其陽在北其陰在南此二者陰陽對待之數圓於外者爲陽方於中者爲陰圓者動而爲天方者靜而爲地者也。

图 1.2.10 伏羲六十四卦方位(书影)

北宋时开始以郑玄注的天地生成数和九宫数来解释河图、洛书。北宋仁宗年间刘牧撰《易数钩隐图》，以九宫数为河图，以天地生成数为洛书。南宋初年朱震著《汉上易传》、张行成著《易通变》、程大昌著《易原》等书传其说。此外，北宋神宗时阮逸假托后魏关朗伪撰《易传》，又以天地生成数为河图，而以九宫数为洛书。南宋蔡元定以此为真。朱熹依蔡所言撰《易学启蒙》。朱谢世后出版的《周易本义》就将河图、洛书刊于卷首。图 1.2.11 为河图书影；图 1.2.12 为洛书书影。

朱熹创造的卦变图具有统计学的意义，它实质上是六十

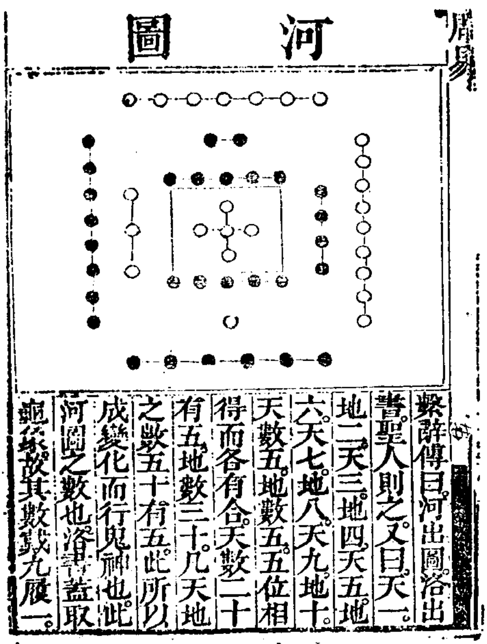


图 1.2.11 河图(书影)

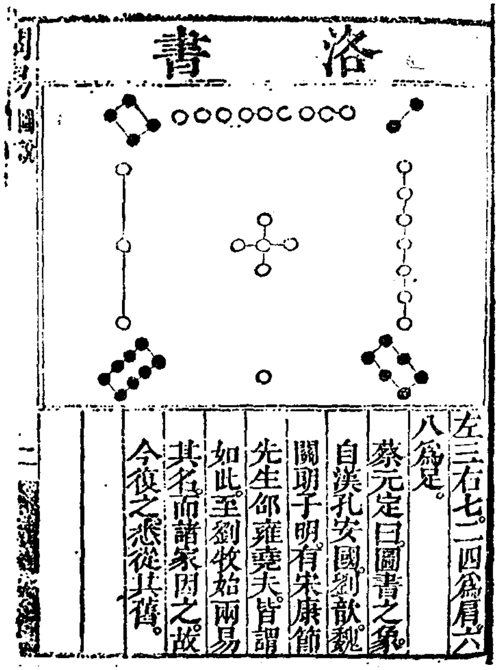


图 1.2.12 洛书(书影)

四卦统计结构的图式。此图将在第三章第二节中讨论，其书影见图 3.2.1。

宋以后的易学关于“太极”是“气”还是“理”的讨论中深化了气、理这对哲学范畴。在符号系统方面，明代来知德提出卦对称性的“错综”概念。清代陈梦雷著《周易浅述》，第八卷为易图说，给出河图、洛书配八卦图，八卦小成图，六十四卦大成图，六十四卦方圆图的各种分解图、纵横图，三十六卦错综图等。陈梦雷对易图的研究可以说是集前人之大成。其中最有

数学意义的是方图纵横图(图 1.2.13)和方图内外图(图 1.2.14)。前者实际上是八卦相乘的矩阵，后者是最典型的对称性分析。图 1.1.3 重卦表就是根据纵横图画的。河图、洛书配八卦的数学意义尚不明，现录于此，以供研究(图 1.2.15、图 1.2.16)。

坤八								八
	艮七							七
		坎六						六
			巽五					五
				震四				四
					离三			三
						兑二		二
							乾一	一
八	七	六	五	四	三	二	一	

图 1.2.13 方图纵横图

十八世纪，德国数学家莱布尼茨(1646—1716)发现了易图和二进制数码的一致性，引起中外学者对易学的数理研究。清代以后的中国学者，剔除易学中唯心主义糟粕，发掘其中的唯物主义因素和辩证法思想以及科学的道理，使易学研究的

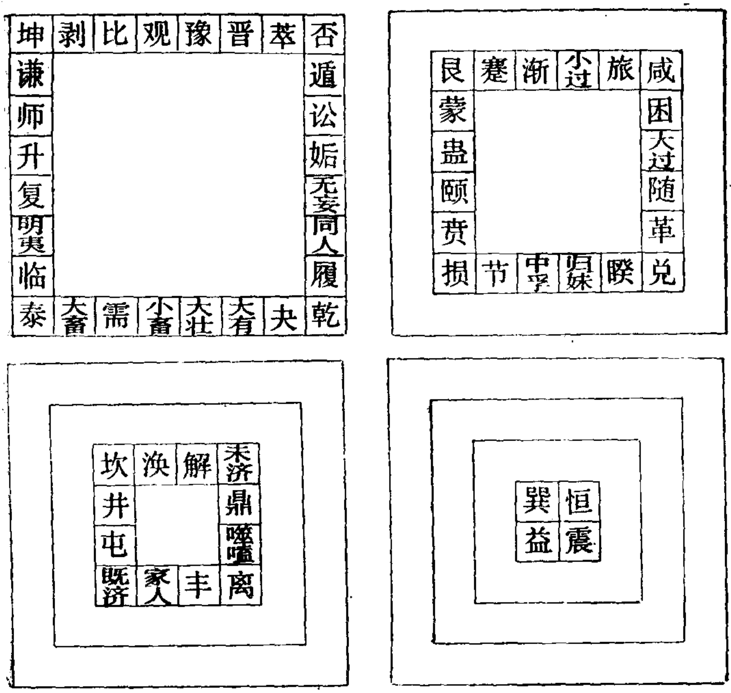


图 1.2.14　方图内外图

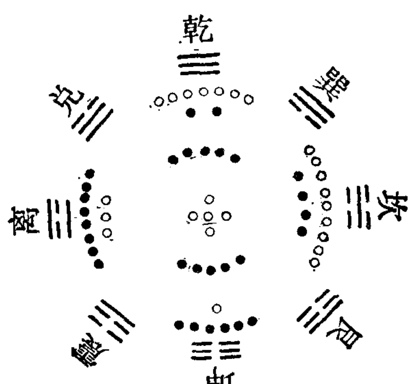


图 1.2.15　八卦配河图

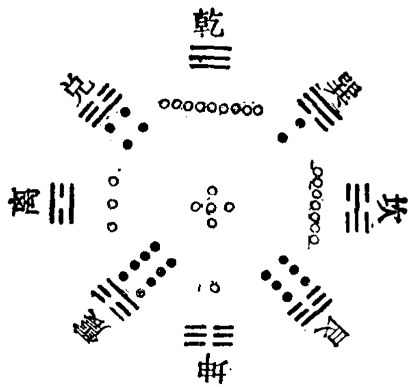


图 1.2.16 八卦配洛书

科学水平提高一大步，出现了一批有价值的著作，出现了易学研究的数理派。

第三节 易学学派

易学研究大略可划分为三派：象数派、义理派和数理派。

因为《周易》这部古典是符号系统和概念系统的结合体，从两者之间的对应关系进行研究是理所当然的。但是这种研究在早期，只限于符号的象征意义和概念体系的对应关系，这种研究的实质是以象取义，也就是根据卦形对卦爻辞作字义解释。我们已述及两仪（--、—）的最基本的象征是阴、阳，八卦的象征是天、地、水、火、风、雷、山、泽。注《易》者用卦形的象征结合自然和社会现象作出种种发挥，借以阐发他们的哲

理观点。象数派盛行于汉代。近人尚秉和著《周易尚氏学》坚持象数传统。义理派则不据卦形，甚至完全摆脱卦象，对卦爻辞进行解释和发挥。此派始于魏王弼，魏晋以后此派为主流，程颐是宋代的代表人物。近人高亨著《周易古经今注》力排象数论，主张"把《易经》看作上古史料，要从这部书里探求《易经》时代的社会生活及人们的思想意识、文学成就等"，"只考究卦爻辞的原意如何，以便进一步利用它来讲那个时代的历史"。数理派侧重研究《易经》的符号体系，甚至不问卦爻辞。这派的研究可认为是从宋代邵雍为前兆，以莱布尼茨为始端。在本世纪三四十年代出了一批对《周易》作科学研究的著作。例如周永簪的《孔子数理哲学初稿》，沈仲涛的《易卦与代数之定律》，薛学潜的《易与物质波量子力学》，丁超五的《科学的易》，刘子华的《八卦宇宙论与现代天文学》等。尽管这类著作中有不同程度的附会的缺点，但它们毕竟体现了作者们力图从科学的角度重新发掘《周易》中的真理的努力。现在，从物理科学、生命科学、系统科学角度研究《周易》者国内外都有，可以称他们为易学的数理学派了。

在易学数理学派的研究中涉及易图与数学、物理科学和生命科学的关系。沈仲涛的《易卦与代数之定律》一书，我们没有找到，只是从丁超五《易理新诠》序中知道有这么一本书。丁超五在其书中由二项式展开说明四象、八卦、六十四卦的演成是合乎道理的，丁超五、薛学潜对于八卦的矩阵分析也有合理之处，对这些后文将予评述。吕子方关于八卦标志空间方位的看法也很有新意，笔者在后文对易图的几何解释就

得益于吕教授《我国古代标志空间方位的符号——八卦》的启发。刘子华1939年写成的获巴黎大学博士学位论文《八卦宇宙论与现代天文》我们没有看到。从刘佳寿在《从八卦推算出第十颗行星》中的介绍知道，刘子华根据易图的对称性利用天文参数推算出应该存在第十颗行星，它的平均轨道速度为每秒2公里，密度为每立方厘米0.424克，离太阳为74亿公里。但是，这一论点没有得到天文学界的承认。虽然有人发表文章指误，刘先生正将自己的论文译为中文出版。薛学潜在其《易与波动量子力学》中，作了从易矩阵推导量子力学诸方程的尝试，并认为易矩阵包含五维空间的概念，还从《易经》关于大衍数的论述推论出包摄经典统计、玻色-爱因斯坦统计、费米-狄拉克统计的易统计。笔者反复阐读了薛先生的书，也许是由于不理解，总感有些牵强附会。丁超五关于先天数与孟德尔遗传定律的关系的分析，有启发意义。

现在中国和外国都有人研究遗传密码和六十四卦图的关系。生物遗传的物质基础是生物细胞核内染色体上的脱氧核糖核酸(DNA)。DNA是由两条由许多核苷酸连接成的核苷酸链构成的双螺旋结构。每个核苷酸又是由脱氧核酸、磷酸和碱基构成的。碱基有四种。每个核苷酸只包含一个碱基，因此核苷酸也就有四种。生物体的遗传特征就是由DNA分子中特定的核苷酸排列顺序决定的，并通过DNA分子的复制把遗传信息一代代地传下去。在子代的发育过程中，记载在DNA分子中的核苷酸顺序上的遗传信息，通过转录和转译过程传给子代，使子代表现出与亲代相似的生活特征。所谓转录就

是根据 DNA 的核苷酸顺序决定信使核糖核酸(mRNA)分子中的核苷酸顺序，mRNA 分子中的核苷酸顺序又决定蛋白质分子中的氨基酸排列顺序。在 mRNA 分子中以一定顺序相连的三个核苷酸来决定一种氨基酸。这种核苷酸三联体称为三体遗传密码。四种核苷酸，三个一组，共有六十四种排列方式。若以四象分别代表一种核苷酸，如以太阴(==)代表胞嘧啶核苷酸(C)，少阴(==)代表尿嘧啶核苷酸(U)，少阳(==)代表腺嘌呤核苷酸(A)，太阳(=)代表鸟嘌呤核苷酸(G)，则六

CCC	CCA	CCU	CCG	CAC	CAA	CAU	CAG
CUC	CUA	CUU	CUG	CGC	CGA	CGU	CGG
ACC	ACA	ACU	ACG	AAC	AAA	AAU	AAG
AUC	AUA	AUU	AUG	AGC	AGA	AGU	AGG
UCC	UCA	UCU	UCG	UAC	UAA	UAU	UAG
UUC	UUA	UUU	UUG	UGC	UGA	UGU	UGG
GCC	GCA	GCU	GCG	GAC	GAA	GAU	GAG
GUC	GUA	GUU	GUG	GGC	GGA	GGU	GGG

图 1.3.1 根据伏羲六十四卦方位编制的遗传密码表

十四卦的每卦便可代表一种三联体密码。于是伏羲六十四卦图便成了一张现代的遗传密码表，如图 1.3.1。有人认为易图可能为探讨遗传信息开辟了一条新途径。①

华裔学者沈宜昌著《科学无玄的易》从数学上分析《易经》筮法，破坏迷信。台湾学者刘毓璋著《易经数理思想》对河图、洛书等作了数学的讨论和发挥。这些以及其他这类著作都属于对《易经》进行数理研究之努力。

① 参见肖景霖：《〈易经〉与遗传密码》，载《百科知识》1985 年第 2 期。

第二章 易图的对称性

在易学研究中，对易图错综对称性的分析是最早涉及易图数学结构的研究。我们从易图的排布法开始，然后进到对卦之错综概念的分析，最后对八卦方位图和六十四卦方图的错综对称性进行讨论。在第三章和第四章我们还将从另外的角度对本章所讨论的错综对称性进行再评价。

第一节 易图之排布

易图的排布方法主要有三种：一是依相反相因的因果概念，借助形象的比喻排序，如《易传》中的《说卦》、《序卦》用的就是这种方法；二是按八卦依序相重而排序，这是具有数学逻辑的排序法，如清代陈梦雷六十四卦序和马王堆帛书六十四卦就用这种方法；三是加重生成法，邵雍的八卦和六十四卦次序就用这种方法。

一、因果比附法

《易传·说卦》说：

乾，天也，故称乎父。

坤，地也，故称乎母。

震，一索而得男，故谓之长男。

巽，一索而得女，故谓之长女。

坎，再索而得男，故谓之中男。

离，再索而得女，故谓之中女。

艮，三索而得男，故谓之少男。

兑，三索而得女，故谓之少女。

邵雍将其绘成图称之为文王八卦次序。朱熹录之于所著《周

图 2.1.1 文王八卦次序（书影）

易本义》卷首。图 2.1.1 是其书影。又根据《易传·说卦》中的"天地定位，山泽通气，雷风相薄，水火不相射"，以及"震为东"，"巽东南"，"乾西北"，"坎北方"，"艮东北"，"离南方"，邵雍排了一个文王八卦方位图，也为朱熹录于卷首。图 2.1.2 为其书影。

《易传·序卦》说："有天地，然后万物生焉。盈天地之间者唯万物，故受之以屯。屯者，盈也。屯者，物之始生也。物生必蒙，故受之以蒙。蒙者，蒙也，物之稚也。物稚不可不养也，故受之以需。需者，饮食之道也。饮食必有讼，故受之以

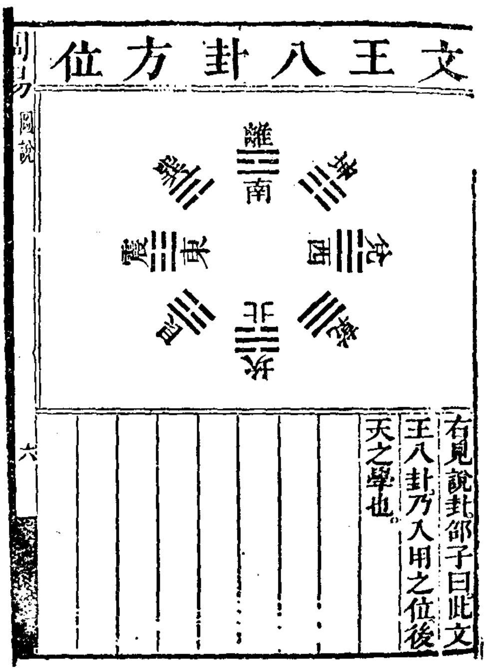


图 2.1.2 文王八卦方位(书影)

讼。讼必有众起，故受之以师。师者，众也。众必有所比，故受之以比。比者，比也。比必有所畜，故受之以小畜。物畜然后有礼，故受之以履。履而泰然后安，故受之以泰。泰者，通也。物不可以终通，故受之以否。……”从天地形成到万物滋生，以致人类社会出现；人类要衣食住行，就会发生斗争，所以要团结、节制，要制订规范，达到安泰；安泰不会长久，而会发生向反面转化……。图 1.1.1 六十四卦序就反映这样一个生动的发展序列，是根据卦名含义结成的“链条”。这种排布是对自然物和人生的一种比附，没有数学的严格的逻辑结构。在这个时期的易学中，符号体系是不严密的。依序重卦排布法出现以后，易图作为符号体系才初具数学逻辑结构。

二、重　卦　法

这种方法源于《易传·系辞下》中的“八卦成列，象在其中矣；因而重之，爻在其中矣。”

八卦各卦两两重叠，就把三爻的单卦变成六爻的重卦，得到六十四卦。如果任意重叠，则六十四卦也就无顺序可言了。上八卦必须规定好顺序，下八卦也必须规定好顺序，才能得到唯一的六十四卦顺序。如果只规定上八卦顺序，不规定下八卦顺序，那就要有 $8! = 40320$ 个排法；如果上下卦都任意排列，那将有 $(8!)^2 = 1625702400$ 种排法；只有当上下卦都规定好顺序，才是唯一的，有 $8^2 = 64$ 种排法。

第一个显示出依序重卦的是帛书六十四卦序。如图 2.1.3。可看出其上八卦序是：

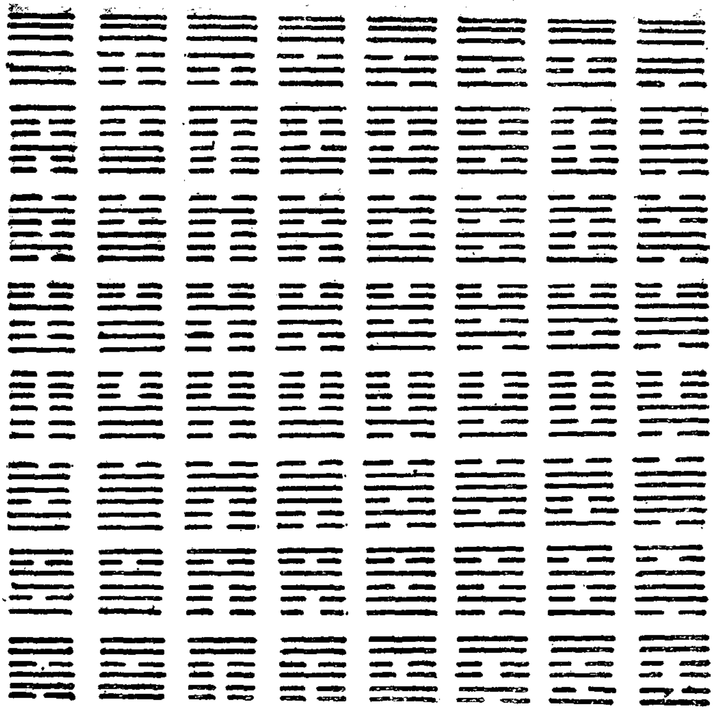


图 2.1.3　帛书六十四卦序

1	2	3	4	5	6	7	8
☰	☶	☵	☳	☷	☱	☲	☴
乾	艮	坎	震	坤	兑	离	巽

即第一行的上卦都是乾，第二行为艮，第三行为坎……

帛书六十四卦重卦法的下八卦序则是：

1	2	3	4	5	6	7	8
☰	☷	☶	☱	☵	☲	☳	☴
乾	坤	艮	兑	坎	离	震	巽

这是上八卦序的四个阳卦乾、艮、坎、震和其四个阴卦坤、兑、离、巽两两相匹而成的卦序。

在重卦时下卦的八个卦依次和上卦的一个卦重，但是上卦每换一个，下卦必须从下卦中选一个和上卦保持同卦相重，下卦其他卦序则保持不变。从数学上看帛书六十四卦序比流行本《周易》六十四卦序漂亮多了，有较高的对称性。

根据帛书六十四卦序的八卦序，我们可以画出其八卦方位图，如图 2.1.4。它既不同于文王八卦方位图，也不同于邵雍画的所谓伏羲八卦方位图。

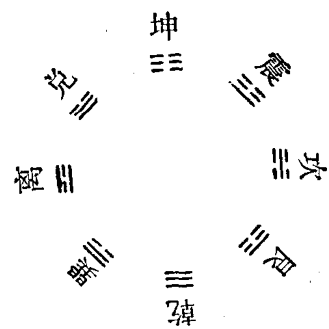


图 2.1.4 帛书八卦方位

清陈梦雷重得六十四卦所采用的八卦序和重法都与帛书不同。从他的方图纵横图（图 1.2.13）可知他所采用的上八卦序和下八卦序是相同的：

坤	艮	坎	巽	震	离	兑	乾
☷	☶	☵	☴	☳	☲	☱	☰
地	山	水	风	雷	火	泽	天

而且，其重法是下卦依序同上卦的一卦相重，完成 $8\times 8=64$ 重次，得六十四卦序列。这种方法的实质是矩阵乘法。陈梦雷六十四卦图可由八卦的列矩阵和其行矩阵相乘而得。陈梦雷的重法比帛书的重法高明，而所得的六十四卦图也更漂亮，表现的对称性也更高。

重卦方法，朱熹曾表述为："先划八卦于内，复划八卦于外，以旋转相加，而为六十四卦。"如图 2.1.5。它是一个六十四卦几何作图法示意。

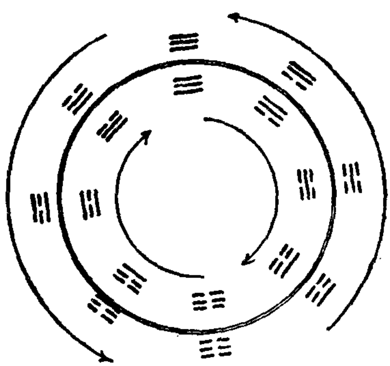


图 2.1.5　重卦示意图

从抽象代数的眼光看，重卦法不只限于八卦相重成六十四卦，可以任意相重。这留待后续讨论。

三、连续加重生成法

邵雍的易卦演成法和上述两种方法都不相同。他的《皇极经世》卷七的《观物外篇》记载了他关于卦图演成的思想：

太极既分，两仪立矣。阳下交于阴，阴上交于阳，四

象生矣。阳交于阴，阴交于阳，而生天之四象，刚交于柔，柔交于刚，而生地之四象，于是八卦成矣。八卦相错，然后万物生焉。故一分为二，二分为四，四分为八，八分为十六，十六分为三十二，三十二分为六十四。故曰分阴分阳，递用柔刚，易六位而成章也。十分为百，百分为千，千分为万；犹根之有干，干之有枝，枝之有叶；愈大则愈少，愈细则愈繁，合之斯为一，衍之斯为万。

正是这个明晰的思想使他创造出伏羲八卦次序等四个先天图。①

陈梦雷的《周易浅述》卷八所载的六十四卦大成衡图（图

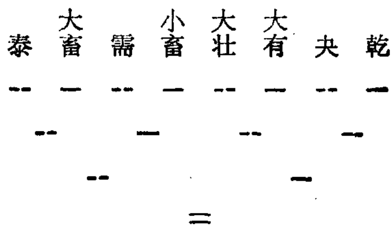


图 2.1.6 a)乾宫图

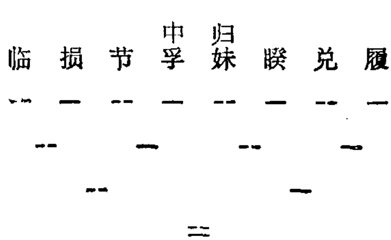


图 2.1.6 b)兑宫图

① 朱熹也同意邵雍的连续二分法，其《语类》卷六十七有“一分为二节节如此，以至于无穷，皆是一生两尔”句。

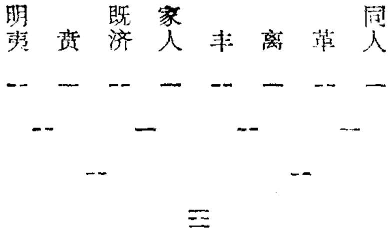


图 2.1.6 c)离宫图

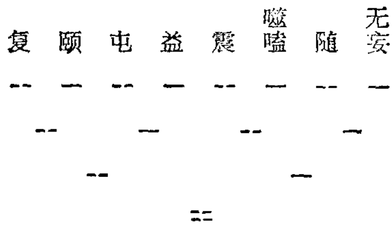


图 2.1.6 d)震宫图

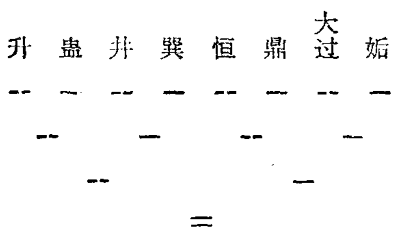


图 2.1.6 e)巽宫图

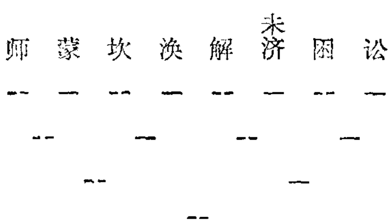


图 2.1.6 f)坎宫图

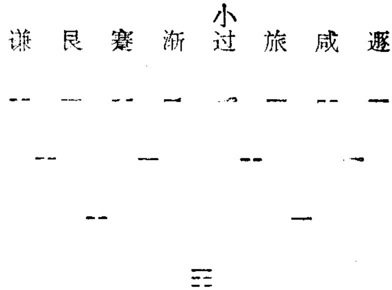


图 2.1.6 g)艮宫图

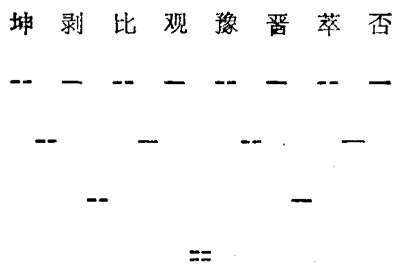


图 2.1.6 h)坤宫图

2.1.6)就是对邵雍的伏羲六十四卦次序图的进一步图解。但是，仍不够明了。六十四卦的演成，按邵雍的意思是在连续的二分基础上连续加重。图 2.1.7 我们给出连续加重的示意。图 2.1.8 就是在二分基础上通过连续重阴阳爻得到的六十四卦衍生图式。它逻辑地给出了六十四卦的次序。但邵雍的六十四卦圆图，因为他强调左右两半圈阴阳对峙，有失数学的逻辑性。我们按纯数学二分法很容易画出更合数理的圆图(图 2.1.9)。

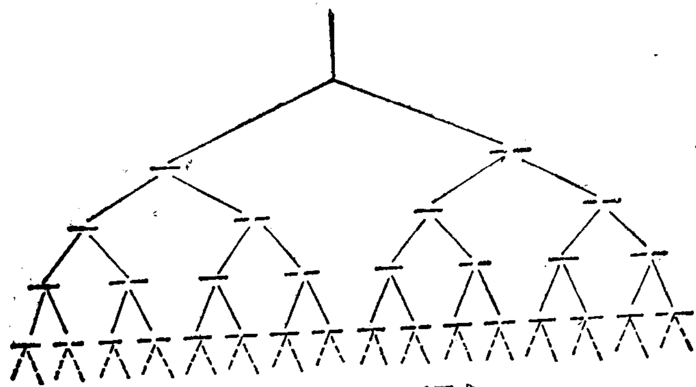


图 2.1.7 连续加重图式

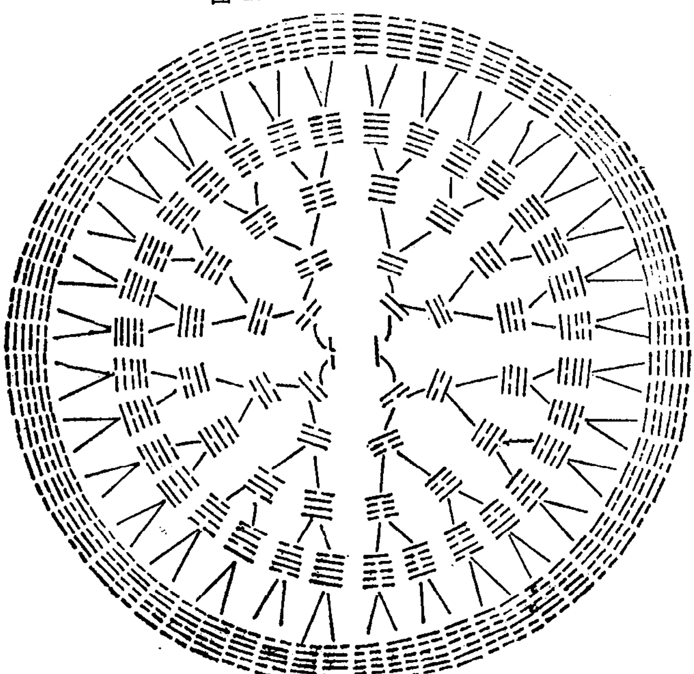


图 2.1.9 六十四卦衍生圆图

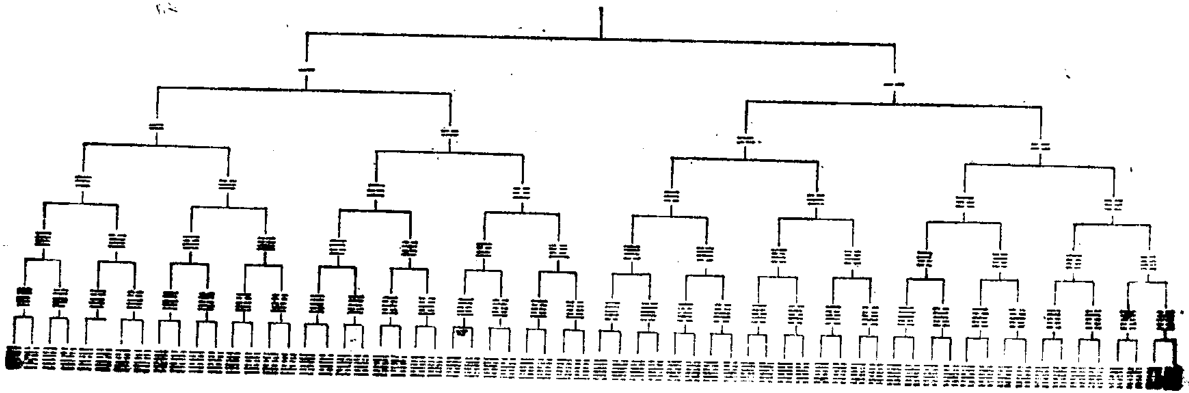


图 2.1.8　六十四卦衍生横图

第二节 卦之错综

卦之错综关系是对易图对称性的一种描述。卦之相互交错和交综的概念是明代来知德（1525—1604）首先提出来的，以便对六十四卦进行分类。清代毛奇龄也有类似的意见。

一、错　　卦

比较两个卦形，我们可以发现一些卦按其爻序正好阴阳相反。这种卦爻依序阴阳相反的卦称为交错卦。例如，乾(☰)和坤(☷)，震(☳)和巽(☴)，坎(☵)和离(☲)，艮(☶)和兑（☱）。六十四卦全部可以分成相互交错的三十二对。图2.2.1给出六十四卦的全部交错卦表。

二、综　　卦

比较两个卦形，我们会发现一些卦卦爻阴阳序相互颠倒。这种次序相互颠倒的卦称为交综卦，毛奇龄谓之反易。例如，随(䷐)之综为蛊(䷑)，否(䷋)之综为泰(䷊)。六十四卦中共有二十八对相互为综的卦。图2.2.2给出全部综卦表。

三、错　综　卦

在六十四卦中，有些卦相互之间既为交错又为交综，称它们为错综卦。错综卦只有四对，它们是：泰、否，既济、未济，随、蛊，渐、归妹。如图2.2.3。

乾	坤	姤	复	鼎	屯	无妄	升	讼	明夷	离	坎
䷀	䷁	䷫	䷗	䷱	䷂	䷘	䷭	䷅	䷣	䷝	䷜
师	同人	咸	损	履	谦	睽	蹇	泰	否	旅	节
䷆	䷌	䷞	䷨	䷉	䷎	䷥	䷦	䷊	䷋	䷷	䷻
观	大壮	兑	艮	噬嗑	井	涣	丰	蒙	革	比	大有
䷓	䷡	䷹	䷳	䷔	䷯	䷺	䷶	䷃	䷰	䷇	䷍

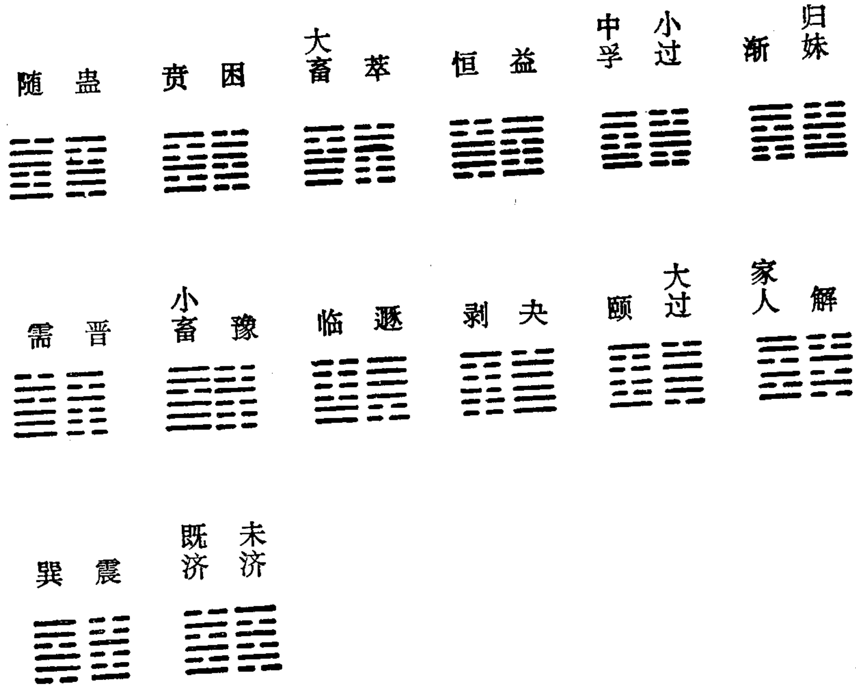


图 2.2.1 六十四卦交错表

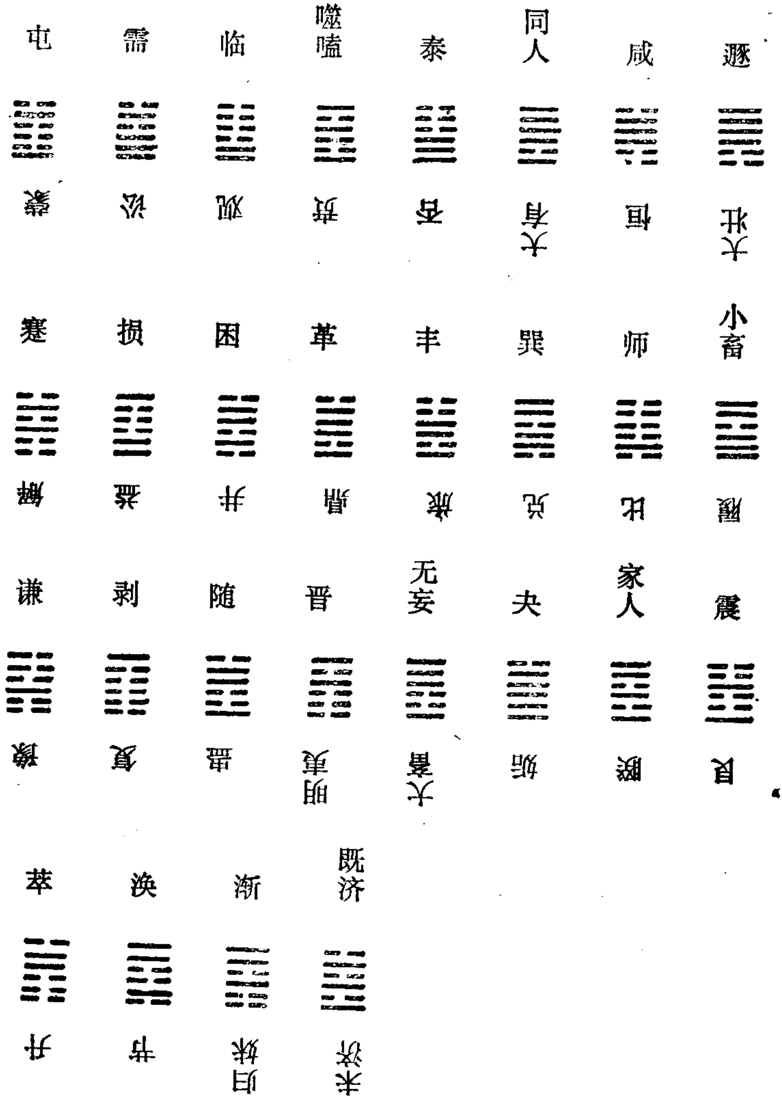


图 2.2.2 六十四卦交综表

泰　否　既济　未济　随　蛊　渐　归妹

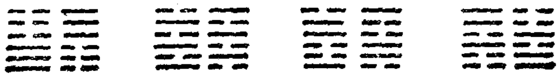


图 2.2.3　错综卦表

四、自　综　卦

六十四卦中不交综者八：乾、坤、坎、离、中孚、小过、大过和颐。它们自己颠倒次序后卦形不变，故称之为自综卦。如图 2.2.4。

乾　坤　坎　离　中孚　小过　大过　颐

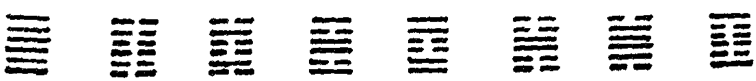


图 2.2.4　自综卦表

六十四卦中交错者六十四，交综者五十六，错综者八；自综者八。错与综也谓之变卦。

比较图 1.1.1 和图 2.2.1 及图 2.2.2 可以看到流行本《周易》的六十四卦序基本上是综卦对的序列。有四对例外，它们是乾、坤，颐、大过，坎、离，中孚、小过。可见流行本《周易》六十四卦序是数学上不完美的。如果按错卦对排序就可以全部成一种对序，那就很漂亮了。

《周易·杂卦》所讲的卦之对立多为综卦。图 2.2.5 给出它的对立卦表。从这个表我们看到有二十五对综卦，其中有

自综卦否泰以水线标出，三对错卦加方框标出，唯大过姤、渐颐、既济归妹、未济夬四对既不综也不错

$\boxed{\text{乾坤}}$	比师	临观	屯蒙	震艮	损益	大畜无妄
萃升	谦豫	噬嗑贲	兑巽	随蛊	剥复	晋明夷
井困	咸恒	涣节	解蹇	睽家人	否泰	大壮遯
大有同人	革鼎	$\boxed{\text{小过中孚}}$	丰旅	$\boxed{\text{离坎}}$		
小畜履	需讼	<u>大过姤</u>	<u>渐颐</u>	<u>既济归妹</u>	<u>未济夬</u>	

图 2.2.5 《易传·杂卦》对立卦表

所以，卦之错综源于《易传·杂卦》。但是在《易传·杂卦》中并无完整的按错综关系分类的体系，亦无"错综"之名称。在《易传·系辞上》中有"错综其数"一语，但那是讲变化的，而不涉及卦形的对称性。

第三节　错综对称性

现在我们依据卦综和卦错的概念来讨论易图的对称性。我们分别讨论八卦方位图和六十四卦方位图。

一、八卦的方位对称性

根据数学排列组合公式，n 个不同的对象的总排列方式是全排列 $P_n^n = n!$。八卦有八个不同的元素，所以它的全排列是 $8! = 40320$。这么多的排列法我们不必一一讨论。我们这

里选择历史上已有的四个图讨论，鉴别其对称性的优劣。我们以单线表示所连之卦为交错关系；以双线表示所连之卦为交综关系；以三线表示所连之卦其一颠倒次序后两卦就有交错关系，名之为综错关系。如图 2.3.1—2.3.4。

从错综关系看伏羲八卦方位图和帛书八卦方位图具有相似的错综对称性。文王八卦方位图和孔子八卦方位图具有相

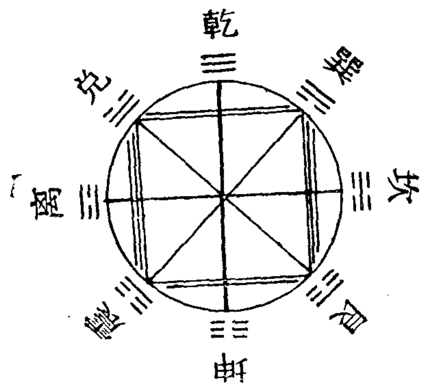


图 2.3.1　伏羲八卦方位对称图

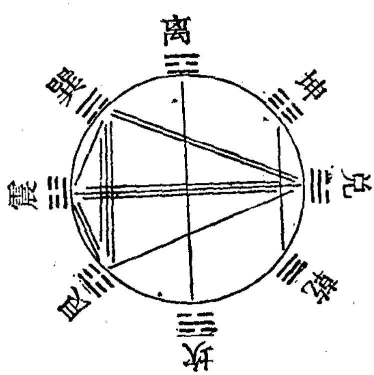


图 2.3.2　文王八卦方位对称图

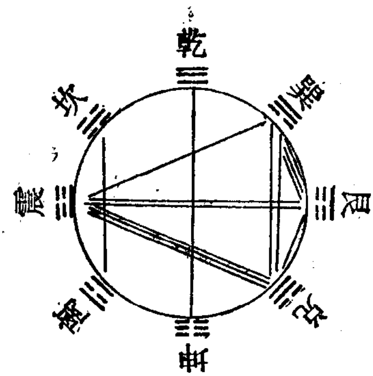


图 2.3.3　孔子八卦方位对称图

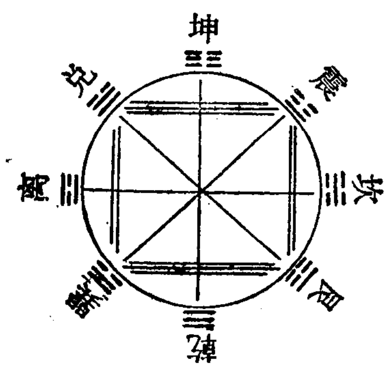


图 2.3.4　帛书八卦方位对称图

似的错综对称性。可见邵雍的伏羲八卦方位图最漂亮，对称性高。

二、六十四卦方位对称性

按照排列组合公式六十四卦的总排列数为：$P_{64}^{64}=64!\cong 10^{89}$。

我们先讨论邵雍画的所谓伏羲六十四卦方位图之方图(图 1.2.10)。当我们将图 1.2.14 以卦形重画为图 2.3.5 立即可以看出陈梦雷内外图之妙处。可以看出由过中心连线连结之卦是交错关系。整个图是分层交错，共四层。这是一个多么漂亮的图啊！是薛学潜第一个作了这一改造。

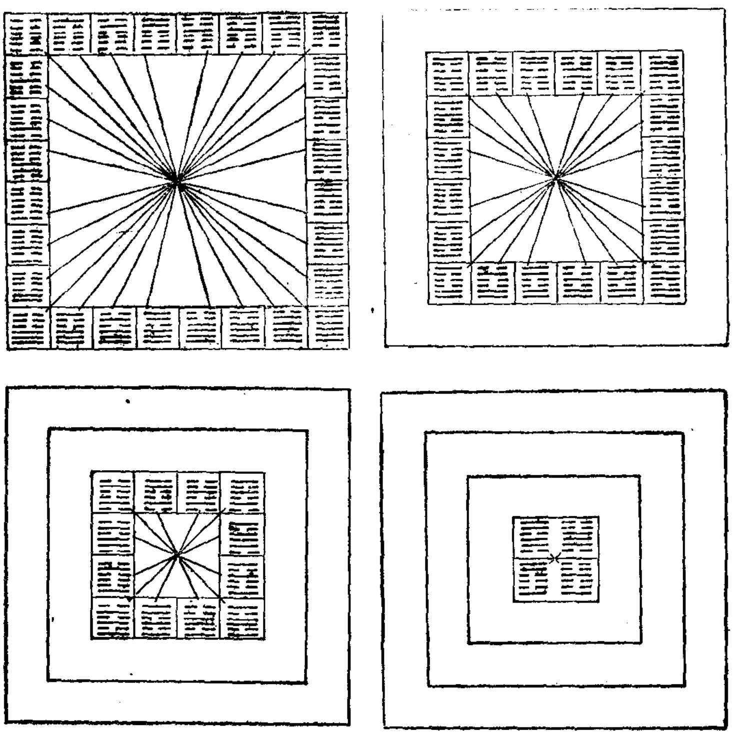


图 2.3.5

但是邵雍的方图尚不能清楚地表现卦之交综对称性。这并不太困难。我把邵氏方图第三列和第五列相换，第四列和

第七列相换，就得到一个新的六十四卦方图，如图 2.3.6。

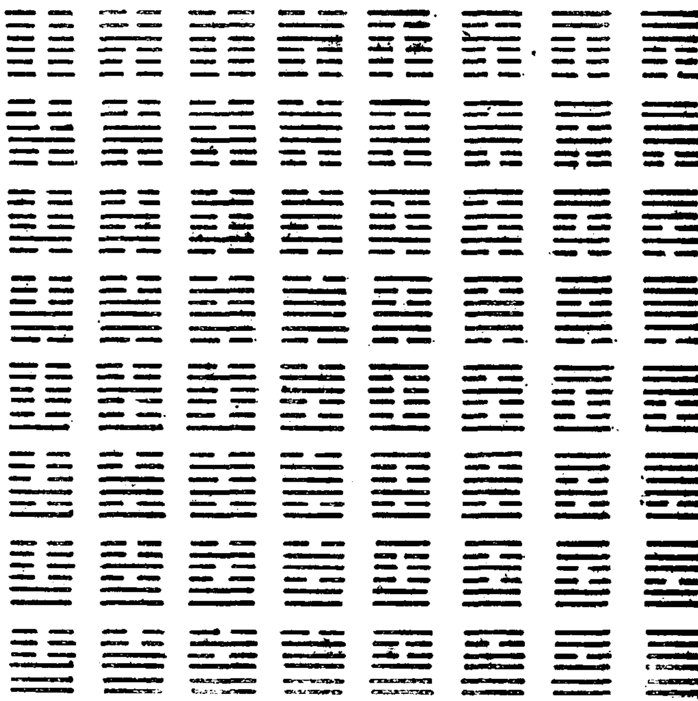


图 2.3.6 高对称性六十四卦方图

图 2.3.6 的微妙之处在于，它不仅可以完美地表现六十四卦的全部交错关系，而且也完美地表现六十四卦的全部交综关系、自综关系和错综关系，也就是说全面地表现出六十四卦的错综对称性。我们首先来看一看自综和错综关系是如何表现的。这比较容易，请看图 2.3.6。这个图的一条主对角线为八个自综卦所占有，另一条为八个错综卦所占有。我们把图 2.3.6 分解画出，如图 2.3.7。这四个图中，有二十八条

线，它们平行于错综卦占有的那条对角线，这些线所连结的卦互为交综卦。至于交错关系也如图 2.3.5 一样，都是由过中心的线所连接，我们没有画出来，读者可以自己连连看。

因为自综卦都处于和交综线垂直的那条对角线上，它可以有交错关系而无交综关系，但可以自综。因为错综卦皆处在同一条交综线上，它们自然有交综关系，交综线和交错线同一，故它们是错兼综的关系。

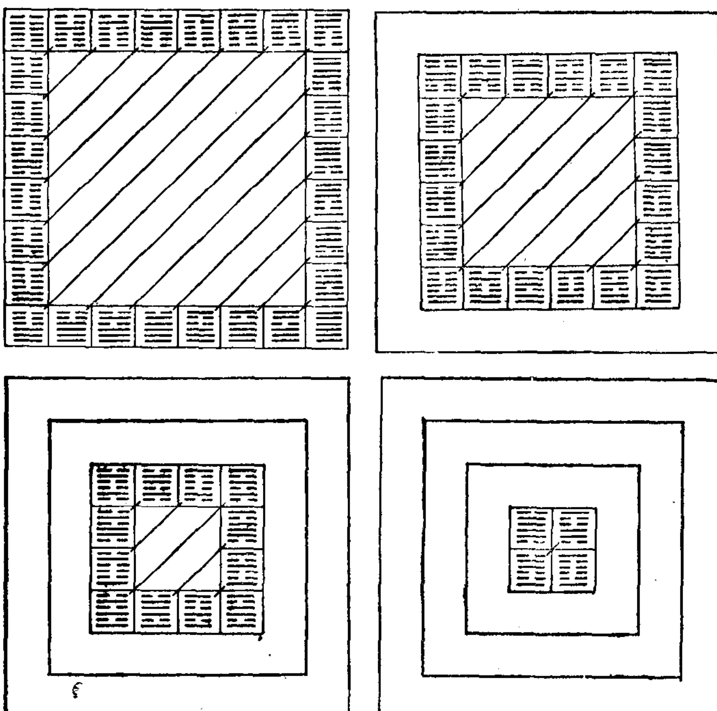


图 2.3.7

第三章　易图的数学解

从现代数学的观点分析易图的结构始于莱布尼茨。本章对已有的二进制解、代数解、矩阵解作了系统介绍和补充，并提出组合解和几何解；对前人的工作作了适当的评价，对于流传的误解也尽力澄清；在易图的数学结构分析的过程中，在适当的地方从新的角度重新认识易图的对称性；除了从现代数学的观念分析了易图的结构外，对易图蕴含的数学思想也试着作了分析，特别是邵雍六十四卦序和朱熹的卦变图中的数学思想。

第一节　二进制解释

计数可以有各种进制。在日常生活中，大都采用十进制。十进制逢十进一，而且十进制数中只用0、1、2、3、4、5、6、7、8、9十个数码，不管多大的数目字都用这十个数码表示。我们在日常生活中也有非十进制计数法。例如，十二进制法，十二个月一年；十六进制法，旧制十六两一斤；六十进制法，六十秒一分，六十分一小时；一百进制，一百年为一世纪等等。二进制

是逢二进一，且只用 0 和 1 两个数码表示所有二进制数字。

如果把阴爻以“0”代替，阳爻以“1”代替，可以看出易卦就是二进制数码组。图 3.1.1 给出八卦和二进制数码的对应关系。

卦画	☷	☶	☵	☴	☳	☲	☱	☰
二进制数	000	001	010	011	100	101	110	111
十进制数	0	1	2	3	4	5	6	7

图 3.1.1 八卦和二进制数对照表

任何一个 n 位 r 进制整数 N 都可以展开为

$$N_r = \sum_{i=0}^{n-1} K_i r^i$$

其中 K_i 是 i 幂位的数字，r 是计数制的底。K_i 的符号个数等于进制底数 r。

对十进制计数法展开式变为

$$N_{10} = \sum_{i=0}^{n-1} K_i 10^i$$

$K_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$。例如，十进制数 $N_{10} = 3407$ 的展开为

$$(3407)_{10} = \sum_{i=0}^{4-1} K_i 10^i$$
$$= 3\times10^3 + 4\times10^2 + 0\times10^1 + 7\times10^0$$

对于二进制计数法，展开式为

$$N_2=\sum_{i=0}^{n-1}K_i2^i$$

$K_i=0,1$。例如，二进制数$N_2=1011$ 的展开为

$$(1011)_2=\sum_{i=0}^{4-1}K_i2^i$$

$$=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$$

对于三进制计数法，展开式变为

$$N_3=\sum_{i=0}^{n-1}K_i3^i$$

$K_i=0,1,2$。例如，三进制数 $N_3=2102$ 的展开为

$$(2102)_3=2\times3^3+1\times3^2+0\times3^1+2\times3^0$$

按照二进制我们把邵雍的六十四卦方位方圆图分别译出为图 3.1.2 和图 3.1.3。图中还给出按二进制展开式得到的对应于二进制数的相应的十进制数。从图可以看出邵雍的六十四卦方图的卦序实质上是二进制（当然也是十进制）的自然数序。但圆图则不完全是，逆时针方向从 0 到 31，从 32 开始又顺时针方向到 63，因为这是他要求圆的两半阴阳对峙的结果，而不是出于数学的考虑。

一些报刊的文章在谈到二进制数学和易图的关系时出现过两个误解：一是说易图是二进制数学，二是说莱布尼茨根据易图发明二进制数学。

其实易图不能算二进制数学，莱布尼茨也不是受易图的启发才发明二进制算法的。

易图本身只不过可以译成二进制数码，但它以及它的演成都并不蕴含二进制算法。

000000 00	000001 01	000010 02	000011 03	000100 04	000101 05	000110 06	000111 07
001000 08	001001 09	001010 10	001011 11	001100 12	001101 13	001110 14	001111 15
010000 16	010001 17	010010 18	010011 19	010100 20	010101 21	010110 22	010111 23
011000 24	011001 25	011010 26	011011 27	011100 28	011101 29	011110 30	011111 31
100000 32	100001 33	100010 34	100011 35	100100 36	100101 37	100110 38	100111 39
101000 40	101001 41	101010 42	101011 43	101100 44	101101 45	101110 46	101111 47
110000 48	110001 49	110010 50	110011 51	110100 52	110101 53	110110 54	110111 55
111000 56	111001 57	111010 58	111011 59	111100 60	111101 61	111110 62	111111 63

图 3.1.2 邵雍六十四卦方图二进制数译表

莱布尼茨是 1679 年写出他的二进制数学体系的，他看见易图是在这之后。莱布尼茨通过法国在中国的传教士白晋(Fr. Joachim Bouvet, 1656～1730)看到了易图。1685 年法王路易十四派洪若翰、白晋、李明、张诚、刘应等来中国传教。他们于 1687 年到达中国。1689 年康熙皇帝接见了张诚、白晋等懂得科学的传教士，并请他们在宫廷学满语，用满语讲数学。白晋受康熙皇帝之命于 1693 年回法国邀请更多的科学家

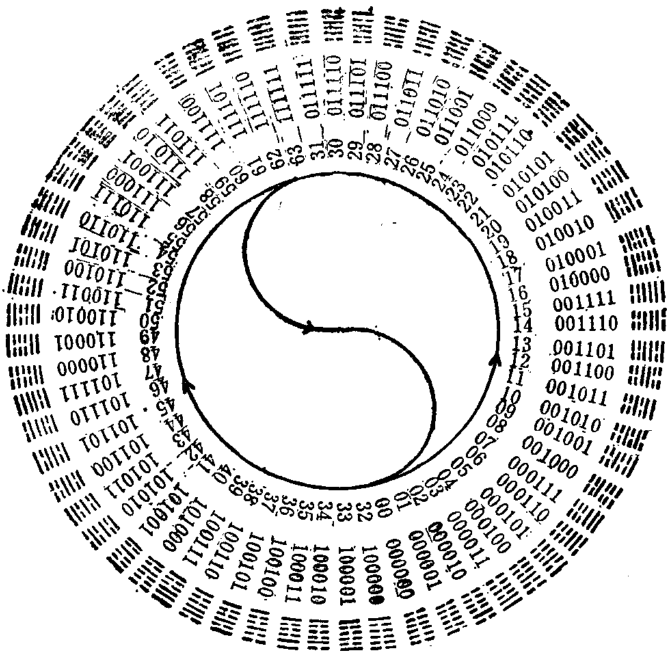


图 3.1.3 邵雍六十四卦圆图二进制数译图

和携带更多的科学书回来。白晋从 1697 年到 1702 年与莱布尼茨有通信交往。莱布尼茨受白晋影响，1698 年开始注意《周易》。1701 年 4 月莱布尼茨把自己的二进制数表给白晋看。同年 11 月白晋把邵雍的伏羲六十四卦次序和伏羲六十四卦方位两个图给莱布尼茨，莱布尼茨发现易图就是 0—63 的二进制数表。根据这个过程，虽然莱布尼茨发表他的论文《谈二进制算术》是在 1703 年，但不能认为是他受易图的启发发明二进制算术，而是他发现了易图结构和他的二进制算术的一致性。

莱布尼茨在他的致德雷蒙的信中说："《易经》也就是变易之书，在伏羲的许多世纪以后，文王和他的儿子周公以及在文王和周公五个世纪以后的著名的孔子，都曾在这六十四个图形中寻找过哲学的秘密……这恰是二进制算术……在这个算数中，只有两个符号：0 和 1。用这两个符号可以写出一切数字。"①

莱布尼茨因为从二进制数学理解了六十四卦图（邵雍的六十四卦方圆图）而高兴地说，几千年不能很好被理解的奥秘

十 进 制	二 进 制	三 进 制
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	10
4	100	11
5	101	12
6	110	20
7	111	21
8	1000	22
9	1001	100

图 3.1.4 三进制和二进制、十进制数字对照表

① 莱布尼茨：《致德雷蒙的信：论中国哲学》，译文载《中国哲学史研究》1981 年第 3、4 期，1982 年第 2 期。

由我理解了，应该让我加入中国籍吧！据说他曾致信康熙皇帝，这件历史文件下落不明。

在第一章中我们已提及扬雄《太玄》图是一种三进制数表。

通常三进制用0、1、2三个数符。图3.1.4是前十个整数

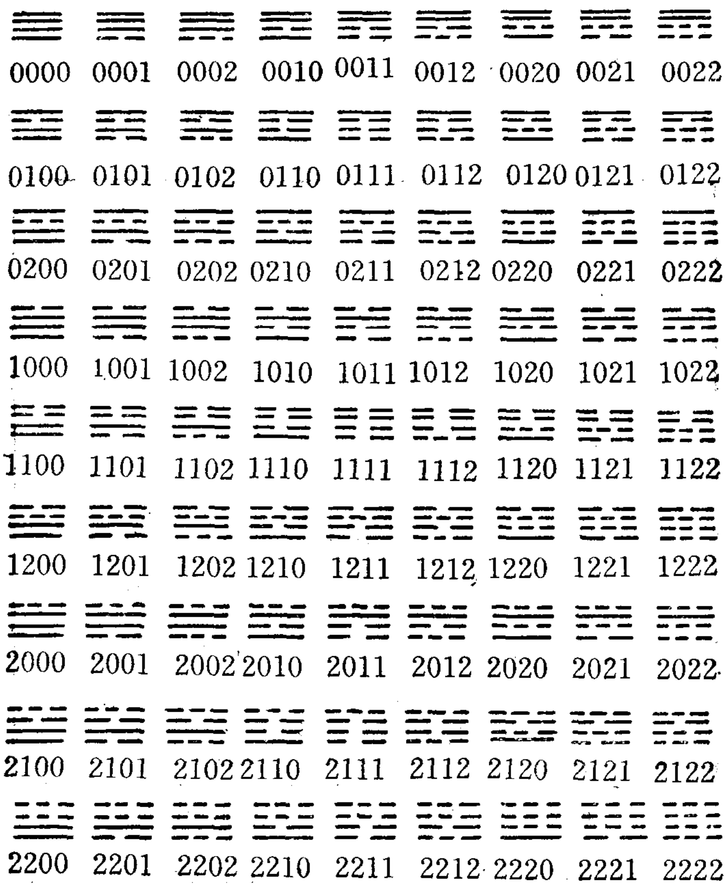


图 3.1.5 八十一首三进制数译表

的三进制写法和二进制、十进制写法对照表。

《太玄》八十一首的三进制数译表见图3.1.5。

二进制和三进制记数，都可以由机械或电磁容易地实现。例如，二进制的两个数符可以由电流的通与断来表示，三进制的三个数符可以由电流的正、负、零来表示。三进制计数法在某些情况下比二进制更有利。有趣的是，我国古代关于易图的表示和二进制、三进制的契合，竟然与现代通讯最优编码的要求接近。用 r 进制表示十进制数时，取 $r=e=2.7183\cdots$ 效率最高。《周易》为二进制，《太玄》为三进制，恰为最接近 e 的两个整数。

第二节　组合解释

易图的结构可由数学中的组合学说明。组合学所研究的是一组事物安排成各种各样模式的问题。主要有三种类型的问题：在什么条件下能够实现满足某种要求的安排；如果安排是可能的，又如何计算实现这种可能的方式，或者说如何分类；在构造出满足一定条件的安排之后，如何研究这种安排的性质和结构。一般地说，组合学与离散结构和关系的分析有关。易图的结构可以由组合学的重集排列予以完全说明。

重集的概念和集合类似，只是它的元素不必是不同的。例如，$\{a, b, c, d\}$ 是集合，而 $\{a, a, a, b, c, c, d, d, d, d,\}$ 则是重集。组合学用指明不同元素出现的次数来表示一个重集。上面的重集可以表示为 $\{3\cdot a,\ 1\cdot b,\ 2\cdot c,\ 4\cdot d\}$。3，1，2，4 分别表

示重集各元素的重复数。重集分有限重集和无限重集。重复数有限的重集叫有限重集，重复数无限的叫无限重集。例如，$\{2\cdot a, 1\cdot b, 3\cdot c\}$ 是有限重集，而 $\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$ 是无限重集。

重集排列是说，如果 S 是重集，S 的 r 排列是 S 的 r 元素的有序排列。重集排列有两个定理：

无限重集排列定理 设 S 是包含 K 个不同事物而每一事物具有无限重复数的重集，则 S 的 r 排列的个数是 K^r。

有限重集排列定理 设 S 是具有有限重复数 $n_1, n_2, \cdots, n_K$ 的重集，且 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_K$，则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_K!}$$

如果重集 S 只有两个不同的对象 a_1 和 a_2，则它的无限重集可表示为 $\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2\}$；当 a_1 的重复数为 n_1，a_2 的重复数为 n_2，且 $n = n_1 + n_2$，则它是有限重集，可表示为 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2\}$，这时 S 的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!} = \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} = C_{n_1}^{n}$$

这样，我们可以把 $C_{n_1}^{n}$ 看作 n 个元素集合的 n_1 的组合数，或看作 n 个元素的重复数为 n_1 和 $n - n_1$ 的重集排列个数。

易图的两仪、四象、八卦……就是阴爻和阳爻两个元素的无限重集的排列数。因为 $K=2$，所以有排列数 $N=2^r$。

当 $r=1$ 时，$N=2$，对应于两仪；

当 $r=2$ 时，$N=4$，对应于四象；

当 $r=3$ 时，$N=8$，对应于八卦；

当 $r=4$ 时，$N=16$，对应于十六卦；

当 $r=5$ 时，$N=32$，对应于三十二卦；

当 $r=6$ 时，$N=64$，对应于六十四卦；

当 $r=7$ 时，$N=128$，对应于一百二十八卦；

还可以按照 $N=2^r$ 的规则增长下去，形成易卦的无限序列。

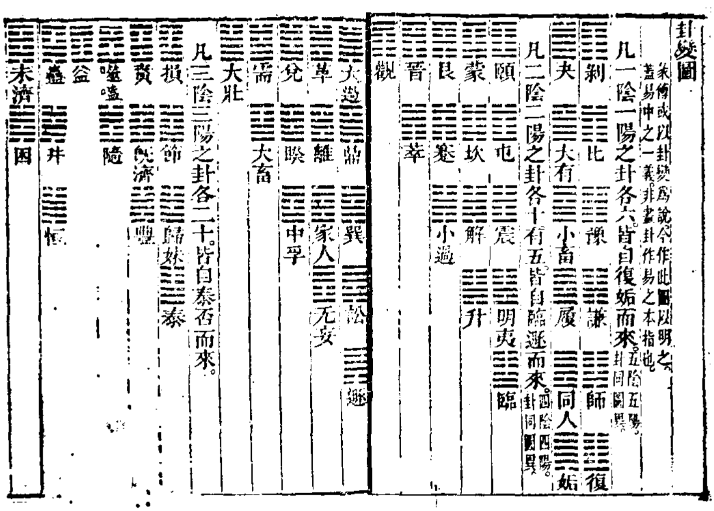
由此可见邵雍的一分为二，二分为四，四分为八，八分为十六，十六分为三十二，三十二分为六十四的无限二分法是有数学意义的。不然，只有八卦和六十四卦就是一个数学上不完备的系统。

两仪、四象、八卦以及六十四卦都可以按 $C(n_1, n)$ 分类。我们以八卦和六十四卦为例。八卦是三爻卦，每卦都可以视为三元素集合的 n_1 组合的一种或三个元素的重复数为 n_1 和 $3-n_1$ 的重集的排列之一种。我们把 n_1 视为阴爻数，则在该卦中的阳爻数为 $3-n_1$。在八卦中只含一个阴爻的卦数为 $C_1^3=\frac{3!}{1!\,(3-1)!}=3$，只含两个阴爻的卦数为 $C_2^3=\frac{3!}{2!\,(3-2)!}=3$，三个爻画都是阴爻的卦数为 $C_3^3=\frac{3!}{3!\,(3-3)!}=1$，三个爻画没有一个阴爻的卦数为 $C_0^3=\frac{3!}{0!\,(3-0)!}=1$，四种卦合起来共八个。

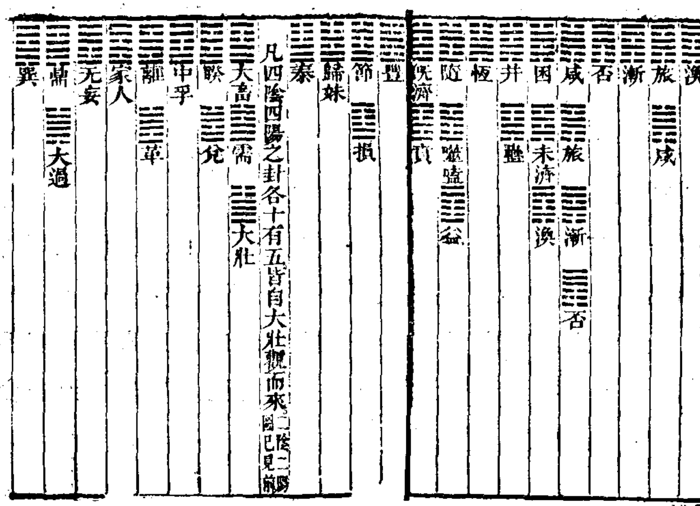
六十四卦是六爻卦，不含阴爻的卦数为 $C_0^6=\frac{6!}{0!\,(6-0)!}=$

1，含一个阴爻的卦数为 $C_1^6=\frac{6!}{1!(6-1)!}=6$，含两个阴爻的卦数为 $C_2^6=\frac{6!}{2!(6-2)!}=15$，含三个阴爻的卦数为 $C_3^6=\frac{6!}{3!(6-3)!}=20$，含四个阴爻的卦数为 $C_4^6=\frac{6!}{4!(6-2)!}=15$，含五个阴爻的卦数为 $C_5^6=\frac{6!}{5!(6-5)!}=6$，含六个阴爻的卦数为 $C_6^6=\frac{6!}{6!(6-6)!}=1$，共六十四卦。对于阳爻可作同样的分析，结果也与阴爻的完全一样。将 $(n-n_1)$ 代 n_1，可得

$$C_{n_1}^{n}=C_{n-n_1}^{n}$$

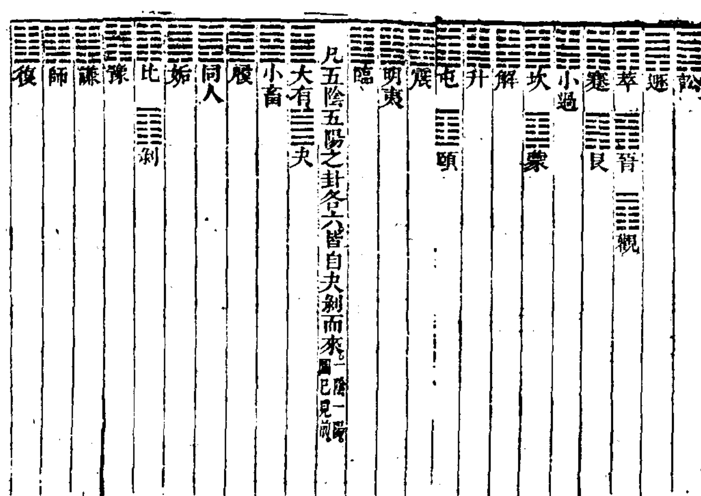


(1)



渙
旅 咸
漸
否
咸 旅 漸 否
困 未濟 渙
井 蠱
恆
隨 噬嗑 益
既濟 賁
豐
節 損
歸妹
泰
凡四陰四陽之卦各十有五皆自大壯觀而來。二陰二陽圖已見前
大畜 需 大壯
睽 兌
中孚
離 革
家人
无妄
鼎 大過
巽

(2)

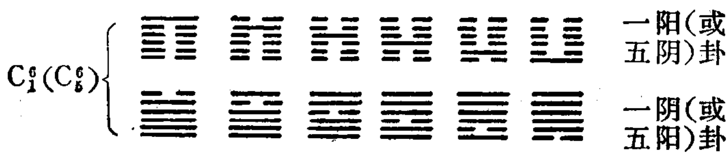


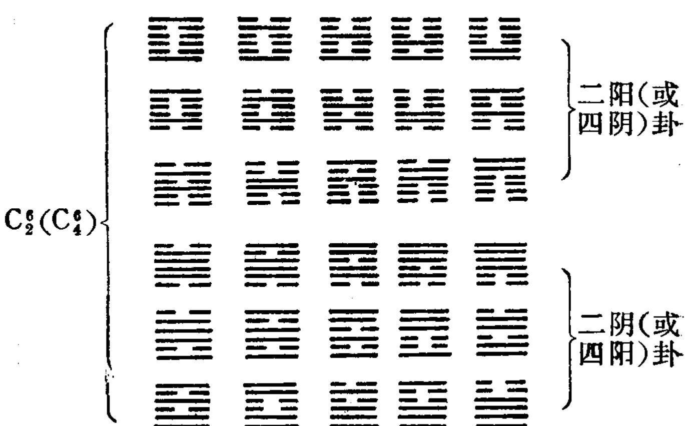
訟
遯
萃 晉 觀
蹇 艮
小過
坎 蒙
解
升
屯 頤
震
明夷
臨
凡五陰五陽之卦各六皆自夬剝而來。一陰一陽圖已見前
大有 夬
小畜
履
同人
姤
比 剝
豫
謙
師
復

(3)

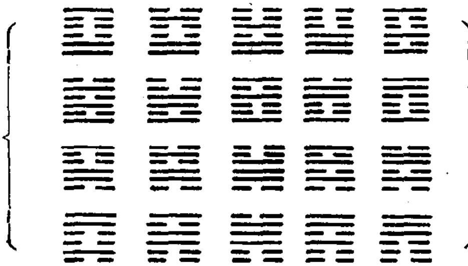
图 3.2.1 卦变图（书影）

上述的组合解释表明易卦的创立者已持有某种组合观念。在古代的易学著作中最能反映以统计观点排列卦画思想的是朱熹《周易本义》中的卦变图（图 3.2.1)。此图，把六十四卦中乾、坤以外的卦分为五类：一阴一阳卦，二阴二阳卦，三阴三阳卦，四阴四阳卦，五阴五阳卦。一阴一阳卦各六，对应于 $C_1^6=6$；二阴二阳卦各十五，对应于 $C_2^6=15$；三阴三阳卦各二十，对应于 $C_3^6=20$；四阴四阳卦各十五，对应于 $C_4^6=15$；五阴五阳卦各六，对应于 $C_5^6=6$（图 3.2.2)。朱熹的卦变图所反映的思想正符合于今天的重集排列规则。反过来说卦变图也是我们所用的重集排列的一种图式。





C_3^6



三阴三阳卦

$C_0^6(C_6^6)$

六阳卦

六阴卦

图 3.2.2 六十四卦的重集排列图式

第三节 代 数 解 释

我们先看代数二项式平方$(a+b)^2$的展开式:

$(a+b)^2=a^2+2\ ab+b^2$

如果我们将 a 代之以阴爻，b 代之以阳爻，规定 $ab\neq ba$，我们由$(a+b)^2$的展开:

$$(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2$$

可以得到四象:

八卦相当 $(a+b)^3$

$(a+b)^3=a^3+ba^2+aba+a^2b+b^2a+bab+ab^2+b^3$

即 ☷ ☶ ☵ ☴ ☳ ☲ ☱ ☰

对于由 n 爻组成的易卦我们可以用一个普遍的公式表示，即

$$(a+b)^n$$

其中 a 代表阴爻(--)，b 代表阳爻(—)，n 是爻数。

当 $n=0$ 时，得太极。

当 $n=1$ 时，得两仪。

当 $n=2$ 时，得四象。

当 $n=3$ 时，得八卦。

当 $n=4$ 时，得十六卦。

当 $n=5$ 时，得三十二卦。

当 $n=6$ 时，得六十四卦。

当 $n=7$ 时，得一百二十八卦。

n 继续增长，就连续形成易卦的序列。

丁超五在他的《易理新诠》中用二项式展开解释了四象和八卦及六十四卦的演成。但认为卦图只是二项式展开的得数，没有给出演算规则。我们上面的分析已不限于四象、八卦和六十四卦，而是在邵雍推广易卦的基础上，对易卦序列作了完整的分析。不仅如此，我们还要在前面关于易图排布研究(第二章，第一节)的基础上说明，邵雍论先天图排布，旨在阐明易卦是一个$(a+b)^n$展开的序列。邵雍在《皇极经世·观物外篇》的那段话，讲的是从太极开始，一分为二，二分为四，四分为八，一直无限地分下去。我们根据他的这段话，画了个连续二分图式（图 2.1.7）。光连续二分，只能给出逐次分裂应

得到的卦数。邵雍的伏羲八卦次序和伏羲六十四卦次序，就是借助连续二分法的概念用图阐明易卦的各次分裂所对应的卦数。一次分裂得两仪，二次分裂得四象，三次分裂得八卦，四次分裂得十六卦，五次分裂得三十二卦，六次分裂得六十四卦。他的图式只到六十四卦，但文字叙述却推至无穷。邵雍的伏羲八卦方位和伏羲六十四卦方位两图给出八卦是三爻卦，六十四卦是六爻卦。卦的爻数只用连续二分是得不出的。他实质上是改造了“八卦相重”的概念，把它变为“两仪连续相乘”的观念。二乘对应得到二爻卦四象，三乘得到三爻卦八卦，四乘得四爻卦十六卦，五乘得到五爻卦三十二卦，六乘得到六爻卦六十四卦，还可以继续乘下去。这就是说，邵雍实际上是由连续二分和两仪连续相乘两概念说明易卦演成的。陈梦雷所作六十四卦大成衡图（图 2.1.6）不只是较详细地解释了邵雍的伏羲六十四卦次序，而且暗示爻数递增。我们摘引他的《六十四卦衡图说》中的一段话为证。

> 八卦未画之先，则太极生八卦。八卦既画之后，则八卦皆可为太极。所谓物物各具一太极者，此也。由是两仪得十六，由是而四象得三十二，由是而八卦得六十四。六画之上无可加，六十四卦之外亦无可益，此数理之自然也。

这段话是说明六十四卦大成八宫图的。八宫图的每宫都是以三爻卦作为太极，三分而成六爻“八卦”，但陈梦雷说易卦到六十四卦为止，这就没有理解邵雍二分到无穷的思想。我们所画的六十四卦衍生横图（图 2.1.8）和六十四卦衍生圆图

(图 2.1.9) 就是为兼顾连续二分和连乘两仪而设计的。这两个图清楚地示明随着逐次二分卦的爻数递增。易卦衍生序列正是随着 n 值的增长按 $(a+b)^n$ 衍生而成的。

如果我们按二项式定理作普遍的分析，就会看到易图的数学完美性。

二项式定理说，设 n 是一正整数，则对所有的 x 和 y，有

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= y^n + C_1^n x y^{n-1} + C_2^n x^2 y^{n-2} + \cdots \\
&\quad + C_{n-1}^n x^{n-1} y + x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k}
\end{aligned}
$$

当以阳爻代 x，阴爻代 y，n 表示卦的爻数时，就可以算出两仪、四象、八卦……的卦数以及卦的分类。

$n=0$，对应于太极：$C_0^0=1$；

$n=1$，对应于两仪：$C_0^1 y + C_1^1 x$，即⚋和⚊；

$n=2$，对应于四象：$C_0^2 y^2 + C_1^2 xy + C_2^2 x^2$，即⚏，⚎⚍和⚌；

$n=3$，对应于八卦：$C_0^3 y^3 + C_1^3 xy^2 + C_2^3 x^2 y + {}^{3}_{3}x^3$，即☷，☶☵☳，☴☲☱，☰。

……

可见邵雍的易图是二项式展开的图式。特别值得注意的是，易图衍生所对应的二项式展开，不是通常的代数二项式，它规定了 x 和 y 的不可对易性，即 $xy \neq yx$。这意味着易图结构是一种量子代数结构。因此，易图在数学史上有它的重要意义。

第四节 几 何 解 释

易卦卦爻的次序性，使我们可以把每卦看作一个 n 数组 $u=(u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots u_n)$，即 n 个数一组。我们知道在三维空间里，一个点的位置由笛卡儿坐标系的三个坐标确定。八卦的每卦都是三爻，从下到上规定它们的顺序，犹如笛卡儿坐标的 (x, y, z) 数组，如果我们规定阳爻为 a，阴爻为 $-a$，则八卦中每卦都是由 a 和 $-a$ 表示的数组：

☷$(-a, -a, -a)$， ☶$(-a, -a, a)$，

☵$(-a, a, -a)$， ☴$(-a, a, a)$，

☳$(a, -a, -a)$， ☲$(a, -a, a)$，

☱$(a, a, -a)$， ☰(a, a, a)。

这样的理解也有先驱。中国 1723 年出版的《数理精蕴》是在康熙皇帝支持下，在皇宫里编译的一部五十三卷的数学百科全书。其中的《阿尔热巴拉新法》就以八卦的阳爻(—)为加号，阴爻(--)为减号。① 吕子方在论证八卦是表空间方位的符号时，也是阳爻(—)对应于“＋”，阴爻(--)对应于“－”。②

如果我们认为把阳爻(—)视为 $+a$，阴爻(--)视为 $-a$ 是可以的。那么八卦的每一卦就代表着三维空间里一个矢量的位置，或者说代表三维空间里的一个确定的点。八卦代表着三维空间里的八个点。这八个点分布在八个象限，形成一个

---

① 钱宝琮主编：《中国数学史》，科学出版社 1964 年版，第 278 页。

② 吕子方：《我国古代标志空间方位的符号——八卦》。

立方点阵。如图 3.4.1。

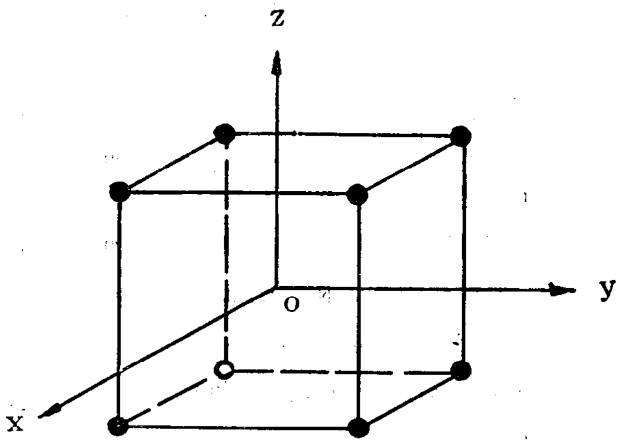


图 **3.4.1** 八卦立方点阵

一般地说，由 n 爻组成的易卦可以视为 n 维空间的点阵，n 是空间的维数。

n=1 是两仪，可视为一维空间直线点阵。

n=2 是四象，可视为二维空间四方点阵。

n=3 是八卦，可视为三维空间立方点阵。

n=4 是十六卦，四维空间的四方点阵。

n=5 是三十二卦，五维空间的五方点阵。

n=6 是六十四卦，六维空间的六方点阵。

n 可以继续增长，随着爻数 n 的增长易卦的空间维数继续增高。

两仪的直线点阵如图 3.4.2。四象的四方点阵如图 3.4.3。

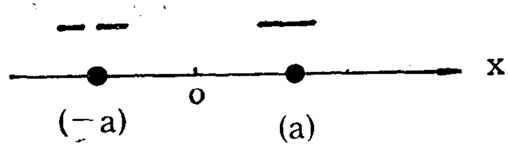


图 3.4.2 两仪直线点阵

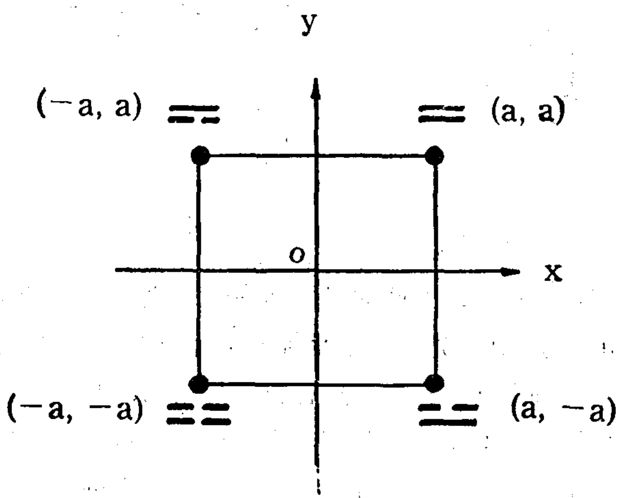


图 3.4.3 四象四方点阵

高于三维的空间点阵，可通过降阶投影作形象理解。我们先看看立方点阵在二维空间和一维空间的投影。

在二维空间的投影即在一个坐标平面（x, y）上投影。一个立方点阵在一个坐标面正投影的结果是八个点变成了四个二重点，即两两相重合在一起。为了在二维空间里表示三维空间的点阵，我们可以引进局部坐标。即在平面上的四个二重点处引进一个垂直于该坐标面的一维局部空间坐标，把二

重点拉开。这样，就好象在一个平面上有四个竖立的哑铃，如图3.4.4。

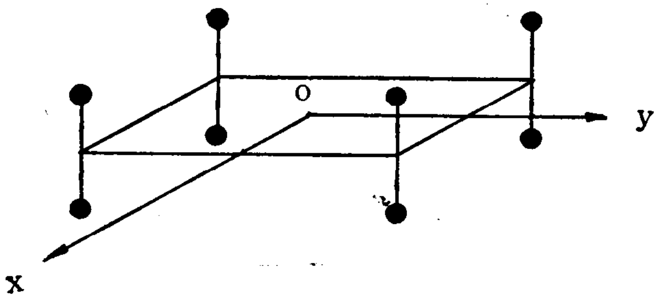


图 3.4.4 八卦立方点阵的二维空间表示

立方点阵在一维空间的投影即在一个坐标轴上的投影。这可以由两步完成：先在一个坐标面上作正投影，然后再把它在一个坐标轴上作正投影。这样投影的结果，八个点就变成了一个坐标轴上的两个四重点。在这两个四重点引入的局部坐标必须是二维的。如图3.4.5所示，立方点阵就成了在两个四重点处各置一对交叉的哑铃了。

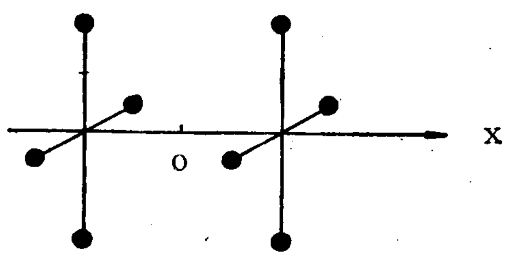


图 3.4.5 八卦点阵的一维空间表示

所以，三维空间在二维空间的投影可把三维空间分解为

(2+1)维，三维空间在一维空间的投影可把三维空间分解为(1+2)维。

类似地，我们可以把六十四卦所代表的六维空间点阵投影到三维空间，也就是分解为(3+3)维来理解。这样，六维空间的六十四个点在三维空间的投影就是八个八重点，即每个点代表六维空间的八个点。在这八个八重点引入三维局部坐标，就如图 3.4.6 所示，每个点是一个小立方点阵。

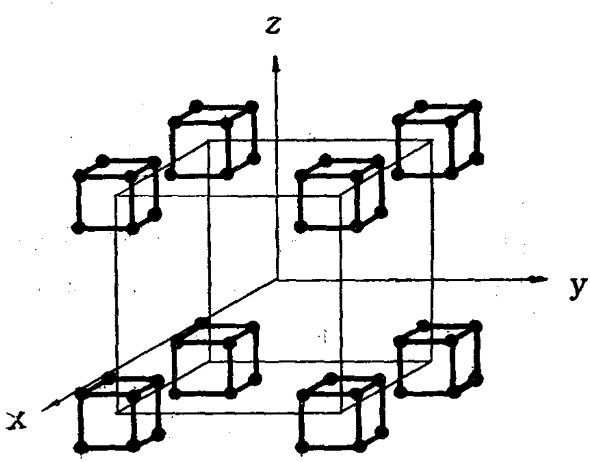


图 3.4.6 六十四卦点阵的三维空间表示

现在我们从易图的几何解释来讨论易图的空间对称性。

对于两仪，其两爻相当于一条直线上对原点O的两个对称点集。所以，两仪具有对O的反射对称。因为反射后阳爻(—)变为阴爻(--)，而阴爻(--)变为阳爻(—)。

对于四象，因为它是二维空间(平面)的四方点阵，当它绕

垂直于正方形并通过 0 的轴线顺时针转 90°，180°，270° 后图形不变；当它对 x 轴，y 轴和两条对角线反射后图形不变。

对于八卦，因为它是三维空间的立方点阵，当它绕 x，y 和 z 轴转 90°，180° 和 270° 后形状不变；绕任一对相对棱中点的连线转 180°后形状不变；绕立方体四条对角线转 120°和 240° 后形状不变；立方体各顶点对 0 反射后形状不变；对过 xy，yz，zx 各平面反射后形状不变；对于对角切割立方体的各平面反射后形状变。还有这些变换的一些联合变换也使形状保持不变。

对八卦以上各阶易卦的分析比较抽象、复杂，但道理类似。易图的这些空间对称性可以由群论给以严格的数学描述。这里不作这类的讨论。

我们在这里要指出，对易图作几何解释后，易图所具有的空间对称性是十分明晰的。上一章讨论的易图的错综对称性都包括于空间对称性之内，但空间对称性比错综对称性要丰富得多。从空间对称性的角度看，所有的交错对称性对应于空间反射对称性。例如，对八卦来说，交错卦位于立方体同一条对角线的相对的两端，立方体的四条对角线连结着四对交错卦。这很容易从图 3·4·1 看出。两对交综卦(☰☱☱☰和☷☶☶☷)位于垂直 y 轴的两个面上的对角位置上，如图 3.4.7 所示。交综对称性对应于这两对交综卦绕 y 轴转 180° 的不变性。两对错综卦(☷☶☱☰和☶☷☰☱)位于两根棱线上，如图 3.4.7 所示。错综对称性对应于这两对错综卦对 zx 平面的反射不变性。

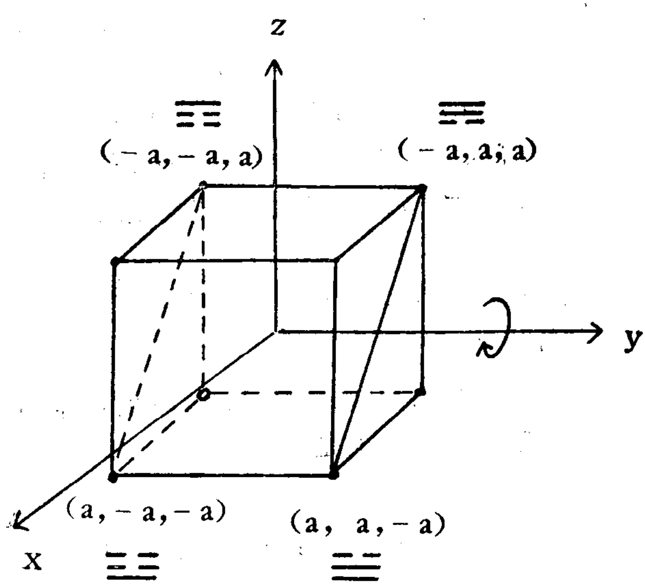


图 3.4.7 八卦交综卦、错综卦立体图

第五节 矩 阵 解 释

矩阵是现代数学之一。

矩阵定义为 m 行和 n 列组成的数表。

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}a_{m4}\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵中的每个数 a_{jk} 称为元素，下角标 j 和 k 分别标出该元

素出现在矩阵中的行号和列号。矩阵常用一个字母表示，上述矩阵可以表示为 A，也可以表示为(a_{jk})。

仅有一行的矩阵称为行矩阵(或行向量)，而仅有一列的矩阵称为列矩阵(或列向量)。行数和列数相等(n 行 n 列)的矩阵称为方阵。矩阵按照它们的元素是实数或复数而分别称为实矩阵和复矩阵。

矩阵有一些特殊的定义和运算规则。

1）矩阵的相等

当两个同阶（即有相同的行数和列数）的矩阵 $A=(a_{jk})$ 和 $B=(b_{jk})$满足 $a_{jk}=b_{jk}$ 时是相等的。

2）矩阵加法

若 $A=(a_{jk})$ 和 $B=(b_{jk})$ 有相同的阶时，则定义 A 和 B 的和为 $A+B=(a_{jk}+b_{jk})$。

3）矩阵减法

若 $A=(a_{jk})$ 和 $B=(b_{jk})$ 有相同的阶时，则定义 A 和 B 的差为 $A-B=(a_{jk}-b_{jk})$。

4）数与矩阵的乘法

若 $A=(a_{jk})$，而 λ 是任一数(或纯量)时，则定义 A 与 λ 的积为 $\lambda A=A\lambda=(\lambda a_{jk})$。

5）矩阵的乘法

若 $A=(a_{jk})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，而 $B=(b_{jk})$ 是 $n\times p$ 矩阵时，则定义 A 和 B 的积为

$$AB=\left(\sum_{l=1}^{n}a_{jl}b_{lk}\right)=(C_{jk})=C$$

6) 矩阵的转置

把一个矩阵的行和列互换得到的矩阵称为矩阵的转置，A的转置记为 A^T。

7) 对称矩阵和斜对称矩阵

设 A 是个方阵，若 $A^T=A$，则称 A 是对称的；若 $A^T=-A$，则称 A 是斜对称的。

8) 单位矩阵

一个方阵，若主对角线上的元素（$j=k$ 的元素）都为 1，而其余元素都为 0，就称为单位矩阵，记为 I。I 的重要性质是 $AI=IA=A$。

9) 零矩阵

全部元素都是 0 的矩阵称为零矩阵。

10) 矩阵的逆

对于给定的方阵 A，存在一个矩阵 B，使得 $AB=I$，则称 B 是 A 的逆(矩阵)，记为 A^{-1}。

邵雍的六十四卦方图是个八行八列的六爻卦表（图 1.2.10）。如果把每个六爻卦看作一个元素，它是一个 8×8 的八阶矩阵。

清代陈梦雷的纵横图（图 1.2.13），表明六爻卦由三爻卦相重而得的原则。这个纵横的完整表示应如图 3.5.1。它是一个 8×8 方阵。这个方阵的每个元素都是八卦中的两卦重叠。图 3.5.1 和图 1.1.3 是同一个重卦表，不同之处只是前者是由八卦的卦名(乾、兑、离、震、巽、坎、艮、坤)表示的，而后者是由八卦的象征(天、泽、火、雷、风、水、山、地)表示的。

坤坤	艮坤	坎坤	巽坤	震坤	离坤	兑坤	乾坤
坤艮	艮艮	坎艮	巽艮	震艮	离艮	兑艮	乾艮
坤坎	艮坎	坎坎	巽坎	震坎	离坎	兑坎	乾坎
坤巽	艮巽	坎巽	巽巽	震巽	离巽	兑巽	乾巽
坤震	艮震	坎震	巽震	震震	离震	兑震	乾震
坤离	艮离	坎离	巽离	震离	离离	兑离	乾离
坤兑	艮兑	坎兑	巽兑	震兑	离兑	兑兑	乾兑
坤乾	艮乾	坎乾	巽乾	震乾	离乾	兑乾	乾乾

图 3.5.1 重卦方阵

丁超五在其《科学的易》中，受陈梦雷纵横图的启发，把邵雍的六十四卦方图看作一个矩阵(方阵)，并解释说是八卦相乘而得。按矩阵乘法，如果

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad B=[b_1 b_2 \cdots b_n],$$

那么

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2\cdots\cdots a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2\cdots\cdots a_2b_n \\ \vdots & \\ a_nb_1 & a_nb_2\cdots\cdots a_nb_n \end{pmatrix}$$

八卦相乘是八卦列矩阵和八卦行矩阵相乘，即

$$\begin{pmatrix} 坤 \\ 艮 \\ 坎 \\ 巽 \\ 震 \\ 离 \\ 兑 \\ 乾 \end{pmatrix}\times[坤艮坎巽震离兑乾]$$

其结果为图 3·5·1。

薛学潜在其《超相对论》中，从矩阵的角度详细地研究了六十四卦错综对称性。他根据矩阵的要求把八卦(乾、兑、离、震、巽、坎、艮、坤)都编了号。令乾=1，兑=2，离=3，震=4，巽=5，坎=6，艮=7，坤=8，用数学符号写出六十四卦的方阵 Γ

$$\Gamma=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12}\cdots\cdots q_{18} \\ q_{21} & q_{22}\cdots\cdots q_{28} \\ \vdots & \qquad\qquad\vdots \\ q_{81} & q_{82}\cdots\cdots q_{88} \end{pmatrix}$$

Γ 这个 8×8 矩阵就代表六十四卦。因为六十四卦是依赖六爻变化的，他规定

$$q_{\mu\nu}=\varphi(\delta_\sigma)$$

$$\mu,\nu=1,2,3,4,5,6,7,8$$

$$\sigma=1,2,3,4,5,6$$

$$\delta_\sigma=\begin{cases}0 \text{ 对应于}(--)\\ 1 \text{ 对应于}(-)\end{cases}$$

他利用矩阵讨论了易卦的错综对称性问题。

令$\widetilde{q}$为 q 之错，$\overline{p}$为 p 之综，对于具有象图 2·3·6 那样排布六十四卦易矩阵，则有：

$$q_{\mu\nu}=\widetilde{q}_{(9-\mu),(9-\nu)}$$

$$p_{\mu\nu}=\overline{p}_{\nu\mu}$$

$$\mu,\nu=1,2,3,4,5,6,7,8$$

上述六十四卦八阶矩阵元素的两种关系(交错和交综)可从图 2·3·5 和图 2·3·7 清楚地看出。为了更易明白，我们用易矩阵的符号 $q_{\mu\nu}$ 和 $p_{\mu\nu}$ 把图 2·3·5 a)重画为图 3·5·2，把图 2·3·7 a) 重画为图 3·5·3。从这两张图，交错和交综的易矩阵元素下脚标之间的关系一目了然。交综卦处于互为转置的位置上，但它们并不相等。从二进制的角度看伏羲六十四卦方位图是完美的，但从矩阵的角度看它不完美，而经我们改排的图 2·3·6 则是完美的，因为这个图可以用矩阵的术语表达错综对称性。

现在我来更广泛地讨论易图的矩阵结构。第一，两仪、四象、八卦……都可以排为矩阵，而且可以排为不同形式的矩

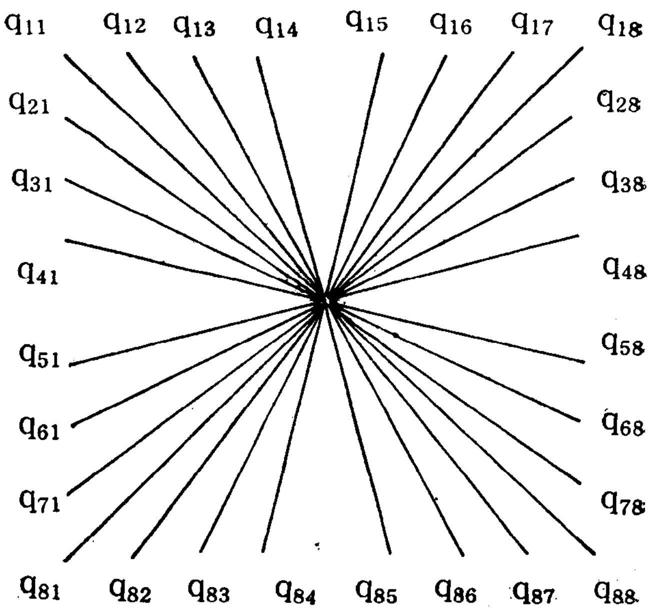


图 3.5.2 交错关系

阵。例如，两仪可以排成行矩阵，也可以排成列矩阵：

$$\begin{bmatrix} ⚋ & ⚊ \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} ⚋ \\ ⚊ \end{bmatrix}$$

四象可以排成方阵，也可以排成行矩阵和列矩阵：

$$\begin{pmatrix} ⚏ & ⚍ \\ ⚎ & ⚌ \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} ⚏ & ⚍ & ⚎ & ⚌ \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} ⚏ \\ ⚍ \\ ⚎ \\ ⚌ \end{pmatrix}$$

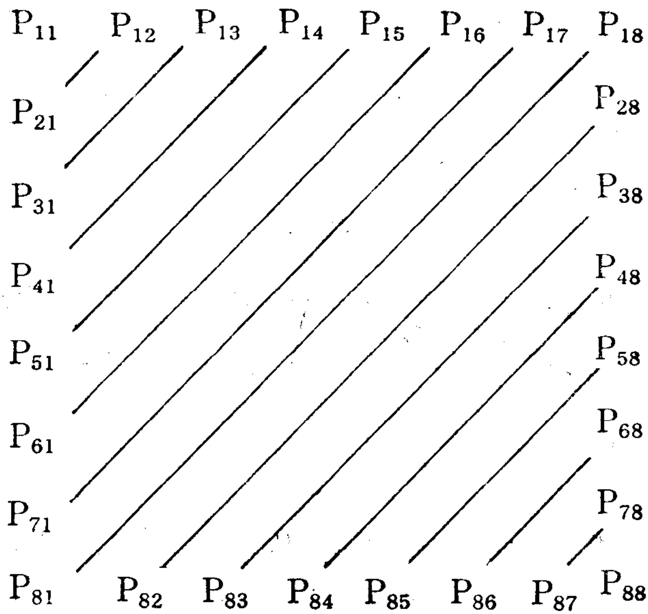
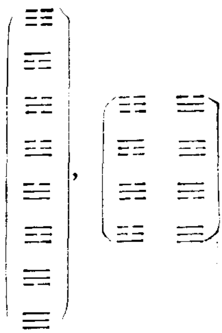


图 3.5.3 交综关系

八卦可以排为下列四种形式:

$$\begin{pmatrix} ☷ & ☶ & ☵ & ☳ \\ ☱ & ☲ & ☴ & ☰ \end{pmatrix},$$

$$[☷\ ☶\ ☵\ ☳\ ☱\ ☲\ ☴\ ☰],$$



第二，易图可以由易矩阵相乘衍生。我们前面已经讨论过，八卦的列矩阵和它的行矩阵相乘衍生出六十四卦方阵。同理，两仪的列矩阵和行矩阵相乘得四象，四象的列矩阵和行矩阵相乘得十六卦……。但是这里的相乘是相重的意思，并非数字或普通代数符号那样的乘法。易矩阵元素的乘法不满足交换律，即 AB≠BA。

第三，我们把易图排成矩阵的形式，并在一定的意义下可以由矩阵乘法说明易图的衍生，但并不能认为易图是一种矩阵数学。因为易矩阵并非蕴含着矩阵数学的各种运算规则，比如矩阵加法。所以，易图的矩阵特征的数学意义是有限的。在以往的学者们的讨论中，似乎没有注意这个问题。

易矩阵元素的乘法的不可对易性是否可以为发展矩阵数学提供某种启示呢？这是个值得研究的问题。

第四章　易对称群

本章用群论的观念研究易图的数学结构。第一节关于群论基本概念的介绍不是对所有读者都是必要的。第二节易生成群的分析是不完备的。第三节是在几何解的基础上把结晶学对称性研究的结果引来说明易图的几何对称性。第四节阴阳反演对称群或许是最反映易图对称性特点的内容。

第一节　群论的基本概念

群论是关于对称性的数学理论。

对称性是物质和思维结构的很普遍的特性，一般地说，对称性是指物质系统或符号系统相对于某种变换的不变性。例如，几何位形相对于某种运动的不变性就是一种对称性。这叫空间对称性或几何对称性。对二维空间来说，使几何位形保持不变的变换，有绕垂直于图面的适当的轴旋转适当的角度的操作，有对垂直于图面的适当平面反射操作。对三维空间来说，除了有各绕轴旋转和对各种平面反射操作外，还有对某中心点的反演操作。不但几何位形对于这些空间变换具有

不变性，描述物质系统运动规律的运动方程，作为符号系统它对于空间坐标的平移、旋转、反演等运算也可能具有形式不变的特性，对于时间的平移、反演也可能具有不变性。对于空间变换以外的种种变换的不变性称为内禀对称性。例如，电荷换号运动方程不变；逻辑学中的命题对两次否定不变。一个系统的所有对称变换的集合是一个群。

一个群是满足一定条件的不同元素的集合。一般，由元素 $G_1, G_2, G_3 \cdots\cdots G_n$ 组成的集合 G，赋予它们一定的合成法则，当它们满足下列四个条件时就形成一个群：

1）G 中的任意两个元素 G_i 和 G_j 在给定的合成法则下合成得到的新元素仍然属于 G。这叫群的封闭性。

2）元素合成法则满足结合律。对任意的元素 G_i, G_j, G_k，有 $G_i \circ (G_j \circ G_k) = (G_i \circ G_j) \circ G_k$ 成立。符号“$\circ$”表中 G 中两个元素的合成。

3）存在一个单位元素 E，属于 G，使得 G 中任意元素 G_i 满足 $E \circ G_i = G_i \circ E = G_i$。

4）对于 G 中的任意元素 G_i 存在一个唯一的逆元素 G_i^{-1}，使得 $G_i^{-1} \circ G_i = G_i \circ G_i^{-1} = E$。

群中元素的个数叫作群的阶。包含有限个元素的群叫有限群，包含无限多元素的群叫无限群。如果群中元素的个数是可数无限的，则群是分立的；如果群中元素的个数是不可数无限的，则群是连续的。群元素的积并不一定是可交换的（对易的），即一般说来 $AB \neq BA$。若群的所有元素都互相对易，则称此群为阿贝尔群（交换群），否则是非阿贝尔群。

一般地说，群的元，即元素，不是事物本身，也不是事物之间的关系，而是事物、关系彼此间的相互变换操作。

如果绕某轴旋转 $2\pi/n$（n 是正整数）使系统保持不变，则此轴线叫作系统的 n 重对称轴，相应的操作记为 C_n。C_n 的整数幂也是系统的对称变换，记作 C_n^k，它表示对系统逐次施以 k 个 C_n 操作，即绕轴转 $2\pi k/n$ 角。对平面的反射用带有表征反射平面的下标 m 或 σ 标记。I表示中心反演操作。恒等操作记为 E。

属于群G的元的行列表可以清楚地表示群的具体构造。图 4·1·1 就是一个四阶群的行列表。

G_j \ G_i	E	X	Y	Z
E	E	X	Y	Z
X	X	E	Z	Y
Y	Y	Z	E	X
Z	Z	Y	X	E

图 4.1.1 四阶群行列表

在写群元的行列表时，行列中元素的次序无关紧要。一种比较好的写法是，使第一列的每一元素(第二操作)是第一行的相应的元素(第一操作)的逆。这样写出的行列表，主对角线只含有单位元 E。

如果群的元素 B 和 C 满足下述关系

$$A^{-1}BA=C$$

称它们为共轭元素。上述运算叫做B通过A的相似变换。显然

$$ACA^{-1}=B$$

一个群常常可以分成一些集合，使得每一集中的元素都互相共轭，但属于不同两集的两个元素互不共轭。这样的集合叫做群的共轭类，或简称类。

如果一个集合H的所有的元素都在群G中，而且H自身也是在同样合成法则下的一个群，则H叫做群G的一个子群。

在一个较大的群中，属于同一类的元素在一个较小的子群中不一定属于同一类。

第二节　生　成　群

如果我们把易图的阴阳爻画看作元素，在一定的条件下，由它们的自乘和相乘生成的群可以构成易图。

我们首先证明，以A代(--)，以B代(—)，由A和B两个元素生成的群，是由A, B, A^2, AB, BA, B^2组成的六阶群，它们就是易卦的两仪和四象。

条件：$A^2=B^3=(AB)^2=E$

证明：

1）此集的单位元素E存在，由条件规定。

2）因为合成法则是乘法，结合律成立。

3）集的六个元素都有其唯一的逆元素：它们各自的倒数。

4）群的封闭性。首先证明 $AB \neq BA$。若 $AB=BA$，则由 $(AB)^2=E$ 将有 $E=ABAB=A^2B^2=B^2$。这显然和条件矛盾。所以，$AB \neq BA$，即 AB 和 BA 是不同的元素。其次证明 $(AB)B$ 属于这个群。由于 $(AB)^2=E$，应有 $(AB)^{-1}=AB$，或者 $B^{-1}A^{-1}=AB$。又由于 $B^3=E$，$B^{-1}=B^2$，所以 $AB=B^2A$。由此得到 $(AB)B=B^2AB=B^2B^2A=BA$。即 $(AB)B$ 属于此集。其他亦不难证明。集中各元素的逆元素也属于这个集可作类似证明。所以，A, B, A^2, AB, BA, B^2 构成一个六阶群。所以这些元素之积可以用一个乘法表表明。图 4.2.1 是此群的乘法表。按照群论我们给出此群元素的正规表示（图 4.2.2）。

	A^2	B	AB	BA	A	B^2
A^2	E	B	AB	BA	A	B^2
B^2	B^2	E	BA	A	AB	B
AB	AB	BA	E	B	B^2	A
BA	BA	A	B^2	E	B	AB
A	A	AB	B	B^2	E	BA
B	B	B^2	A	AB	BA	E

图 4.2.1 乘法表

A(--) B(—) 为两仪。

A^2(==)，AB(=-)，BA(-=)，B^2(═) 为四象。

选择合适的条件，就可以由 A, B 两个元素的自乘和相乘形成更高阶的群，它对应于两仪、四象、八卦的全部卦画。我们可以同样作成乘法表和给出该群元素的正规表示。

$$\Gamma(E)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad \Gamma(A)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma(B)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \Gamma(AB)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma(BA)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad \Gamma(B^2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

图 4.2.2 群元素的正规表示

类似的讨论可以继续下去。

第三节 几何对称群

在这节中，我们将在易图的几何解释(第三章第四节)的

基础上讨论易图的几何操作对称性。我们以四象和八卦为例讨论它们的空间对称群。这种讨论是从空间对称性理解易图数学结构的一个方面。这种对称性同晶体的空间的对称十分相似，我们完全用物理学中这方面的术语，因而我们的讨论也就十分简单。这节的内容可以参考任何一本关于物理学空间对称群的书，如 A·W·约什著的《物理学中的群论基础》。

一、四象的空间对称群

四象的几何解释是一个平面上的四个对称点(图3.4.3)。四个点连直线构成一个正方形。所以四象的空间对称性就是正方形的对称性。正方形的对称操作构成一个群。图 4.3.1

符　号	操　　作
E	恒等操作
C_4	绕垂直于正方形并通 0 的轴线沿顺时针方向转 90°
C_4^2	绕上述轴转 180°
C_4^3	绕上述轴转 270°
m_x	对 x 轴的反射
m_y	对 y 轴的反射
σ_u	对对角线的反射
σ_v	对另一对角线的反射

图 4.3.1　对称操作符号表

第二操作	第一操作							
	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_μ	σ_υ
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_μ	σ_υ
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_υ	σ_μ	m_x	m_y
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_υ	σ_u
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

图 4.3.2 C_{4v} 乘法表

是正方形的操作和对应的群论表示符号表。表中列出了正方形的全部对称操作。这些操作构成一个群，在物理学中称之为 C_{4v} 群。图 4·3·2 是 C_{4v} 的乘法表。

二、八卦的空间对称群

八卦的几何解释表明，它构成一个立方点阵。它的完全对称群称为 O_h 群。它共有四十八个元素，其中二十四个是真转动，另二十四个是非真转动。真转动组成 O_h 的子群，记为 O，称为真转动立方点群。图 4·3·3 是群 O 元素的分类表。

类	操　　　作
(E)	恒等操作(一个元素)
$(3C_4, 3C_4^3)$ 或$(6C_4)$	绕 x，y 和 z 转 90° 和 270° (6 个元素)
$(3C_4^2)$	绕 x，y 和 z 转 180° (3 个元素)
$(6C_2)$	绕任一对相对棱中点的连线转 180°(6 个元素)
$(4C_3, 4C_3^2)$ 或$(8C_3)$	绕立方体四根对角线转 120°和 240°(8 个元素)

图 4.3.3　群 O 元素分类表

第四节　阴阳反演对称群

易图的阴阳反演类似于物理学中的电荷反演。对于两仪、四象、八卦……施以阴阳反演变换它们都具有不变性。我们只讨论两仪的二阶群、四象的四阶群和八卦的八阶群。其余可以类似地进行讨论。

两仪是个二阶群。

我们规定 G 为使卦变号的操作，G 作用于阳爻使之变为阴爻，G 作用于阴爻使之变为阳爻，用符号表示即为 G— = --，G-- = —。两仪这个符号系统只包含两个符号，即阴爻和阳爻。如果 G 作用于该系统，阳爻变为阴爻，阴爻变为阳爻，变换后的系统仍然是由阴阳两个符号组成的两仪系统。这就是两仪对 G 变换具有不变性。对两仪系统的 G 变换构成

一个二阶群，它的两个元素是：表示不作任何变换的单位元 E 和变号操作 G。这个二阶群的乘法表为图 **4·4·1**。

	E	G
E	E	G
G	G	E

图 4.4.1 两仪对称群乘法表

四象是个四阶群。

因为四象是两画卦的符号系统，共有四个符号。对四象符号系统来说有四种变换操作使变换后的系统和原系统一样，它们构成一个四阶的对称变换群。

我们以 G_0 表不施变换，它是这个四阶群的单位元 E，即 $G_0=E$。G_1 表示对下爻施加变换。G_2 表示对上爻施加变换。G_{12} 表示对上下两爻同时施加变换。

我们现在来说明，这四种变换都能使变换后的系统和原来的系统一样，即仍为四象。

四象的符号系统为：

⚏　⚍　⚎　⚌

G_0 作用于四象，按 G_0 的定义它不改变四象的符号系统。

G_1 作用于四象。由于 G_1⚏＝⚎，G_1⚍＝⚌，G_1⚎＝⚏，G_1⚌＝⚍，所以变换后的系统为：

⚍　⚌　⚏　⚎

可见，对四象施以 G_1 变换的结果仍为四象，即四象对于 G_1 具有不变性。

G_2 作用于四象。由于 G_2⚏＝⚎，G_2⚎＝⚏，G_2⚍＝⚌，G_2⚌＝⚍，所以变换后的系统为：

⚎　⚏　⚌　⚍

可见，对四象施以 G_2 变换的结果仍为四象，即四象对 G_2 变换具有不变性。

G_{12} 作用于四象。由于 G_{12}⚏＝⚌，G_{12}⚎＝⚍，G_{12}⚍＝⚎，G_{12}⚌＝⚏，所以变换后的系统为：

⚌　⚍　⚎　⚏

可见，对四象施以 G_{12} 变换的结果仍为四象，即四象对 G_{12} 变换具有不变性。

我们现在来证明这四个变换构成一个群。

因为 $G_0=E$ 表示不变换，所以 $G_0G_1=G_1$，$G_0G_2=G_2$，$G_0G_{12}=G_{12}$；$G_1G_0=G_1$，$G_2G_0=G_1$，$G_{12}G_0=G_{12}$。

因为 G_1 作用于四象的结果为：

⚍　⚌　⚏　⚎

对这一结果再施以 G_1 的变换则为：

⚏　⚎　⚍　⚌

它正是未施任何变换的四象图式，所以 $G_1G_1=G_0=E$。

因为 G_1 作用于四象的结果为：

⚍　⚌　⚏　⚎

对这一结果再施以 G_2 的变换则为：

⚌　⚎　⚍　⚏

它正好为 G_{12} 作用于四象的结果，所以 $G_2G_1=G_{12}$。

因为 G_1 作用于四象的结果为：

⚎　⚌　⚏　⚍

对这一结果再施以 G_{12} 的变换则为：

⚍　⚏　⚌　⚎

它正好为 G_2 作用于四象的结果，所以 $G_{12}G_1=G_2$。

同样分析，可以证明：$G_2G_2=E$，$G_1G_2=G_{12}$，$G_{12}G_2=G_1$，$G_{12}G_{12}=E$，$G_1G_{12}=G_2$，$G_2G_{12}=G_1$。图 4.4.2 给出这个四阶群的乘法表。

	G_0	G_1	G_2	G_{12}
G_0	E	G_1	G_2	G_{12}
G_1	G_1	E	G_{12}	G_2
G_2	G_2	G_{12}	E	G_1
G_{12}	G_{12}	G_2	G_1	E

图 4.4.2　四象对称群乘法表

八卦对称群是个八阶群。

因为八卦是三画卦的符号体系，是八个符号组成的符号集。我们以 G_0 表示不施任何变换，即 $G_0=E$，它是群的单位元。G_1 表示对下边的爻画施以变换。G_2 表示对中间的爻画施以变换。G_3 表示对上边的爻画施以变换。G_{12} 表示对下爻

和中爻同时施以变换。G_{23} 表示对中上爻同时施以变换。G_{13} 表示对下上两爻同时施以变换。G_{123} 表示对三个爻画同时施以变换。

现在以乾卦☰为例，说明这些变换的意义。G_0☰＝☰，G_1☰＝☴，G_2☰＝☲，G_3☰＝☱，G_{12}☰＝☶，G_{23}☰＝☳，G_{13}☰＝☵，G_{123}☰＝☷。

对其他卦来说这些 G 变换有类似的意义。我们现在以 G_1 变换为例，说明八卦符号体系对 G_1 变换具有不变性。

八卦的符号体系为：

☰　☷　☳　☴　☵　☲　☶　☱

对八卦各卦符都施以 G_1 变换后的结果为：

☴　☳　☷　☰　☶　☱　☵　☲

可以看出它仍然是原来八卦的八个符号的集合，只不过次序有了变化。

对八卦符号体系施以 $G_2, G_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}, G_{123}$ 变换的结果，可以证明，也使八卦符号集保持不变。

现在我们来证明：$G_0, G_1, G_2, G_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}, G_{123}$ 这八个变换构成一个群。很容易看出 $G_1G_2=G_2G_1=G_{12}$，$G_1G_3=G_3G_1=G_{13}$，$G_1G_{12}=G_{12}G_1=G_2$，$G_1G_{13}=G_{13}G_1=G_3$，$G_1G_{23}=G_{23}G_1=G_{123}$，$G_1G_{123}=G_{123}G_1=G_{23}$……。清楚地表示这些关系的是图 4.4.3 的乘法表。

	G_0	G_1	G_2	G_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	G_{123}
G_0	E	G_1	G_2	G_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	G_{123}
G_1	G_1	E	G_{12}	G_{13}	G_2	G_3	G_{123}	G_{23}
G_2	G_2	G_{12}	E	G_{23}	G_1	G_{123}	G_3	G_{13}
G_3	G_3	G_{13}	G_{23}	E	G_{123}	G_1	G_2	G_{12}
G_{12}	G_{12}	G_2	G_1	G_{123}	E	G_{23}	G_{13}	G_3
G_{13}	G_{13}	G_3	G_{123}	G_1	G_{23}	E	G_{12}	G_2
G_{23}	G_{23}	G_{123}	G_3	G_2	G_{13}	G_{12}	E	G_1
G_{123}	G_{123}	G_{23}	G_{13}	G_{12}	G_3	G_2	G_1	E

图 4.4.3 八卦对称群乘法表

类似地可以证明十六卦对称群是十六阶群，三十二卦对称群是三十二阶群，六十四卦对称群是六十四阶群，2^n 卦的对称群是 2^n 阶群。

第五章　阴阳定律

在《周易》中，一切事物的一切变化都是以阴阳的对抗和消长来说明的。通过对易图的分析，可以对这种基本概念给出一系列的量化描述，使之精确化。

第一节　《周易》的变化图式

易图为我们提供了一个复杂的，然而秩序井然的变化图式。这个变化图式由“进化”和“循环”两种基本形态构成。太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦……这种由简单到复杂的无限展开是一种开放的进化趋向。在这个总的进化趋向中，它形成两仪、四象、八卦等各个进化等级。在这样的每个等级内，事物的变化是一种封闭的循环运动，即在由卦数决定的可能状态内变化，通过阴阳消长从一种可能的状态变到另一种可能的状态。

一、进　化

在第二章的第一节之三《连续加重生成法》中，我们已经

讨论过，易图形成一个由两仪、四象、八卦……构成的无限序列。在第三章的第二节《组合解释》中，我们又曾用阴爻和阳爻这两个元素的无限重集排列来进一步说明这个无限序列的形成，可能的排列数由

$$N = 2^r$$

表示。这个公式清楚地给出易卦生成所表明的进化图式。其中 r 代表进化的等级，N 表示的是这个等级的可能的状态数。例如：

$r=1$　代表两仪，其可能的状态数 $N=2$；

$r=2$　代表四象，其可能的状态数 $N=4$；

$r=3$　代表八卦，其可能的状态数 $N=8$；

$r=4$　代表十六卦，其可能的状态数 $N=16$；

$r=5$　代表三十二卦，其可能的状态数 $N=32$；

$r=6$　代表六十四卦，其可能的状态数 $N=64$；

……

原则上 r 可以增至无穷，所以进化是无止境的，是一个无限的开放过程。这种进化是一个有始无终的时间过程。

二、循　　环

另一方面，进化的每个等级，两仪、四象、八卦……，又形成一个封闭的系统。在第四章《易对称群》中，我们已经用群论讨论了这种系统的封闭性。《周易》是以“卦变”的概念来阐明这种封闭系统内的变化的。所谓卦变是指卦爻发生阴阳反演。

例如，对八卦之离卦☲来说：

初爻反演离变为艮☶，

二爻反演离变为乾☰，

上爻反演离变为震☳。

又如，对六十四卦之否卦䷋来说：

初爻反演否变成无妄䷘，

二爻反演否变成讼䷅，

三爻反演否变成遯䷠，

四爻反演否变成观䷓，

五爻反演否变成晋䷢，

上爻反演否变成萃䷬。

八卦的变卦都在八卦之内，六十四卦的变卦都在六十四卦之内，任一 r 级卦的变卦也必在 r 级卦系统之内。这种封闭性我们已经用群论阐明过，这里的举例也是一目了然的。

从任一 r 级卦系统中选出适合的一部分，按阴阳消长的顺序排列，它们就表现出周期性（循环特征）。

例如，对八卦我们可以排出：

☳	☱	☰	☴	☶	☷
震	兑	乾	巽	艮	坤

又如，对于六十四卦，我们可以排出：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
䷗	䷒	䷊	䷡	䷪	䷀	䷫	䷠	䷋	䷓	䷖	䷁
复	临	泰	大壮	夬	乾	姤	遯	否	观	剥	坤

汉代易学家称六十四卦中的这十二卦为消息卦。前六卦是阳长阴消的趋向，到乾卦阳长到顶点，然后转为阳消阴长的趋向，直到坤卦阳尽。如果把十二消息卦以圆图形式画出就可以明显地看到阴阳消长的周而复始的循环过程。如图5.1.1，就是古人用十二消息卦表示一年月份的。

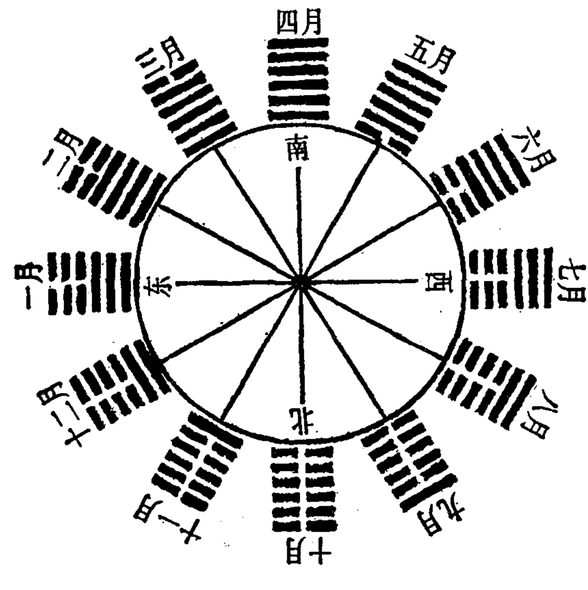


图 5.1.1 十二辟卦图

宋代邵雍在其《皇极经世》中，就是利用这十二消息卦来阐明他的循环历史观的。他把泰定为“开物”，把乾定为“盛世”，把剥定为“闭物”。

第二节　阴阳守恒律

如果我们以 p 表每卦的阳爻数，q 表示阴爻数，则对任意 r 级卦都有如下关系：

$$p+q=r \tag{5·2·1}$$

我们称式(5·2·1)为"守恒律"。其中 r 是卦系的等级：

r=1 对应于两仪，

r=2 对应于四象，

r=3 对应于八卦，

r=4 对应于十六卦，

r=5 对应于三十二卦，

r=6 对应于六十四卦，

……

守恒律(5·2·1)式很容易由任找一卦直接验明，无须赘述。

守恒律表明，尽管卦有千变万化，但是，在同一卦系中，各卦中的阴阳爻数之和是不变的。这意味着由卦系表示的事物任一可能状态中的阴量和阳量的总和是守恒的，也就是说阴量和阳量是不生不灭的，只能是相互转化，即阴量转化为阳量或阳量转化为阴量，显示阴阳的消长。

这样，我们就把阴阳消长的图式描述代数化了。利用守恒律的数学形式，去分析中国古典中以阴阳为概念基础的自然理论，如传统医学，将会有助于对它们的理解和改造。

第三节 阴阳平衡律

易图提供的另一个规律是，对于两仪、四象、八卦……等卦系，阴爻数的总和 Q 等于阳爻数的总和 P，即各为卦系总爻数之半：

$$P=Q=\frac{1}{2}2^{r}\cdot r \qquad (5\cdot3\cdot1)$$

我们称它为阴阳平衡律，其中 r 是卦系等级。

在第二章的第二节《卦之错综》中，我们已经讨论过卦的错综对称性。交错卦阴阳互反，如䷢和䷄，䷱和䷂。可以看出，每个交错卦对的阴爻数和阳爻数相等，且等于卦系的级数 r。因为任何 r 级卦系的卦数为 $N=2^{r}$，且组成 $\frac{1}{2}N$ 个交错对，所以 r 级卦系的阴爻（或阳爻）的总数必为 $\frac{1}{2}N\cdot r=\frac{1}{2}2^{r}\cdot r$。

例如，对于八卦，$r=3$，所以有：

$$P=Q=\frac{1}{2}\cdot2^{3}\cdot3=12$$

又如，对于六十四卦 $r=6$，所以有：

$$P=Q=\frac{1}{2}\cdot2^{6}\cdot6=192$$

阴阳平衡律意味着，对于任何以 r 级卦系表示其可能状

态的事物，尽管在每个可能的状态中阴量和阳量可能不同，但存在于各可能状态中的阴量之总和等于阳量之总和。同守恒律一样，平衡律也是易图图式的代数化，它也必然有助于我们对中国古典自然理论的理解和改造。

第四节 阴阳置换律

对于 r 级卦系可以按阴爻数和阳爻数之比分类。

$$\frac{p}{q}=K \tag{5·4·1}$$

这里 p 为阳爻数，q 为阴爻数。因此 $K=0$ 为全阴爻卦，$K=\infty$ 为全阳爻卦，$K>1$ 为阳爻多于阴爻的卦，$K<1$ 为阴爻多于阳爻的卦。

在某一 r 级卦系中，具有相同 K 值的卦可以自成一类。它们中的每一卦都有相同的 p 和 q，但是由于 p 和 q 的排列不同而形成不同的卦。这样的排列之可能方式数 N 为

$$\begin{aligned}N&=C_p^r\\&=\frac{r!}{p!\cdot(r-p)!}\\&=\frac{r!}{p!\cdot q!}\\&=C_q^r\end{aligned} \tag{5·4·2}$$

例如，对于八卦，$K=2$ 的卦有

$$
\begin{aligned}
N &= C_2^3 \\
&= \frac{3!}{2!\cdot 1!} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

它们的具体形式是

☱　☲　☴

对于六十四卦，例如 K＝1 的卦有

$$
\begin{aligned}
N &= C_3^6 \\
&= \frac{6!}{3!\,(6-3)!} \\
&= \frac{6!}{3!\cdot 3!} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

它们的具体形式可在图 3·2·2 中查到。

对于任意 K 类，满足守恒律(5·2·1)自不待言，但平衡律(5·3·1)式一般不被遵守，只有 K＝1 这类才满足。

第六章　易同余式

《周易·系辞上》有一段说明占筮方法的文字：

大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时；归奇于扐以象闰，五岁再闰，故再扐而后卦。天一，地二，天三，地四，天五，地六，天七，地八，天九，地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。乾之策二百一十有六，坤之策百四十有四，凡三百有六十。当期之日。二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。是故四营而成《易》，十有八变而成卦，八卦而小成。引而申之，触类而长之，天下之能事毕矣。

占筮是一种迷信活动，但《周易》筮法却是一个机巧的数学设计。它和数论的同余式理论有关。

第一节　《周易》筮法

根据历来对《周易》筮法的考察，我们在这里作一概述，作

为后面对它进行数学分析的基础。

筮法分"成卦法"和"变卦法"以及"释卦法"。大衍之数和成卦法数学问题有关，而天地之数则同变卦法相关。

一、成 卦 法

所谓成卦法，实质上是通过数字变演决定阴阳爻。将五十根蓍草取出一根不用，其余四十九根名为"用策"。"用策"经三变二十一演决定一爻，十八变得六爻而成卦。

第一变

第一演　将"用策"四十九任意分为a、b两部分。

第二演　从a部取出一策，即"挂一"。

第三演　将a－1策四、四数之，即"揲之以四"。

第四演　取出第三演之余策，或一，或二，或三，或四。

第五演　将b部四、四数之，亦即"揲之以四"。

第六演　取出第五演之余策，或一，或二，或三，或四。

第七演　将第二演、第四演、第六演取出之策（一挂二扐之策）合在一起（非五即九）弃之不用，其余之策合在一起（非四十四即四十）以备下一变用。

第二变

第八演　如第一演。

第九演　如第二演。

第十演　如第三演。

第十一演　如第四演。

第十二演　如第五演。

第十三演　如第六演。

第十四演　如第七演。

第二变弃去之策非四即八，余下备用之策或四十，或三十六，或三十二。

第三变

第十五演　如第一演。

第十六演　如第二演。

第十七演　如第三演。

第十八演　如第四演。

第十九演　如第五演。

第二十演　如第六演。

第二十一演　如第七演。

第三变弃去之策非四即八，所余之策或三十六，或三十二，或二十八，或二十四。

第三变结果的四种可能的策数分别是四的九、八、七、六倍。九、八、七、六这四个数称之为“四营数”。三变毕若得营数九、七，则成阳爻，九为老阳，七为少阳；若得营数八、六则成阴爻，八为少阴，六为老阴。于是初爻成。二、三、四、五、上各爻皆依成初爻之法，各经三变二十一演而得。六爻具得而成卦。每卦六爻，每爻需经三变，故得成一卦需经十八变。

上述成卦法为朱熹《易学启蒙》定式。另外，其后秦九韶（约 1201—1261）在其《数书九章》中所述的演法与朱熹所载大不相同。

秦九韶所述演法：总策五十，用策四十九，任意分用策为

两部分，取其中一部分用于演卦，先一、一数之，再二、二，三、三，四、四重新数之。一、一数之自然余一，其他三种数法其余数亦只能是一、二、三、四这四个数字。秦九韶在这里把"揲之以四"理解为一、一数之，二、二数之，三、三数之，四、四数之。因为揲一必余一，不必数，径直"挂一"，称揲二、揲三、揲四三次重数为"三变"。关于如何确定爻之阴阳，秦氏说得不甚清楚。最简单的办法是视四揲总余数之偶奇决定爻之阴阳，偶数得阴爻，奇数得阳爻。或将四揲总余数四、四数之，所余必为一、二、三、四。若余一，得老阳；若余二，得少阴；若余三，得少阳；若余四，得老阴。

二、变 卦 法

在筮法中经十八变所成之卦称为"本卦"，所变之卦称为"之卦"。什么是变卦，我们在第五章的第一节之二《循环》中已说明；并且在第四章的第四节《阴阳反演对称群》中还曾讨论过，任何卦系对阴阳反演变换具有不变性。因此，任何属于六十四卦系的本卦之之卦都不出六十四卦，必为其中之一。

每一本卦都有六种可能的变卦。筮法中的变卦法在于求得宜变之爻，以确定之卦。高亨通过研究认为，确定之卦要用到天地之数。当演求本卦时，还要记下每爻的营数，以便计算本卦的营数。因为每爻的营数或九、或八、或七、或六，所以卦的营数，即各爻营数之和，最大者是六个九之和，五十四；最小者是六个六之和，三十六，其他必居五十四和三十六之间。求

宜变之爻的方法，按高亨的研究①，就是将本卦的营数加上卦之爻序，使之等于天地之数五十五。具体做法是，首先以五十五减去本卦之营数得其余数，然后自初爻数至上爻再从上爻数至初爻，如此往复数至余数尽为止，所止之爻即为宜变之爻。所遇宜变之爻为九则变六，为六则变九，遇七、八不变。

三、释 卦 法

遇不变之卦，以本卦卦辞释之；遇可变之卦，一般以本卦变爻爻辞释之。但有例外，如本卦六爻皆为九、六则称之为“全变卦”，如本卦六爻皆为七、八则称之为“不变卦”。全变卦乾卦以“用九”释之，坤卦以“用六”释之，其他全变卦以之卦卦辞释之。看不出这些释卦规则有何数学意义，故不赘述。

第二节 易同余式

《周易》成卦法和同余式理论有关，并且可以从中归纳出一种“易同余式”。

同余式属于数论理论，它是关于数的可除性的一种符号语言。

定义：命 m 为一自然数，若 (a－b) 为 m 之倍数，则称 a, b 为对模 m 同余，记作

$$a \equiv b \pmod{m}$$

---

① 高亨：《周易古经今注》(重订本)，中华书局 1984 年版，第 145 页。

意即 $a-b=mK$，K 为一整数。

若 $a-b$ 不为 m 之倍数，则称 a, b 为对模 m 不同余，记为

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

《周易》成卦方法的机巧在于，将五十策蓍草三变二十一演而必然得下列四种可能策数之一：

$$4\times 9=36$$

$$4\times 8=32$$

$$4\times 7=28$$

$$4\times 6=24$$

非经精密的数学计算或反复试验，不可能得到如此机巧之构思。这种机巧，从数论来看正是同余式理论的思想。

成卦法程序的一般数学形式如下：

衍数五十记为 N，用数四十九记为 $N-1$，并令 $N_1=N-1$。

第一变

将 N_1 任意分为两部分，表为 $N_1=a_1+b_1$。

a_1 部挂一后四、四数之，可表为

$$a_1\equiv r_{a1}+1 \pmod{4}$$

这里 r_{a1} 是四、四数之所剩的余数，它可以是 1, 2, 3, 4 之一。

b_1 部四、四数之可表为

$$b_1\equiv r_{b1} \pmod{4}$$

根据同余式代数加法规则，有

$$a_1+b_1\equiv r_{a1}+r_{b1}+1 \pmod 4$$

令 $R_1=r_{a1}+r_{b1}$，又因 $N_1=a_1+b_1$，所以有

$$N_1\equiv R_1+1 \pmod 4$$

第二变

令 $N_2=N_1-(R_1+1)$，如同第一变，则有

$$N_2=a_2+b_2$$

$$a_2\equiv r_{a2}+1 \pmod 4$$

$$b_2\equiv r_{b2} \pmod 4$$

$$N_2\equiv R_2+1 \pmod 4$$

第三变

令 $N_3=N_2-(R_2+1)$，则有

$$N_3=a_3+b_3$$

$$a_3\equiv r_{a3}+1 \pmod 4$$

$$b_3\equiv r_{b3} \pmod 4$$

$$N_3\equiv R_3+1 \pmod 4$$

令 $N_4=N_3-(R_3+1)$，则有

$$\begin{aligned}N&=N_1+1\\&=N_2+R_1+2\\&=N_3+R_1+R_2+3\\&=N_4+R_1+R_2+R_3+4\end{aligned}$$

如果令 $R=R_1+R_2+R_3$，则有

$$N=N_4+R+4 \tag{6·3·1}$$

因为N_4能被4整除，所以上式的同余式形式为

$$N-R-4\equiv 0 \pmod 4 \qquad (6\cdot3\cdot2)$$

对《周易》筮法来说，因为

$N=50$

R_1 的可能值为 4，8。

R_2 的可能值为 3，7。

R_3 的可能值为 3，7。

所以R有四个可能值：10，14，18，22。由(6·3 1)式，N_4 的可能值必为：36，32，28，24。于是筮法的成卦法得到数学上的证明。

如果作更一般的讨论，N不限为五十，R也不限为上述四个值，模也可不为四，用x，y，m代N，R和4，则(6·3·2)式可以表示为下述形式：

$$x-y-c\equiv 0 \pmod m \qquad (6\cdot3\cdot3)$$

或者更为一般的形式：

$$ax+by+c\equiv 0 \pmod m \qquad (6\cdot3\cdot4)$$

我们称(6·3·4)这个二元一次同余式为"易同余式"。由它可以构造出各种同等效用的筮法。于是大衍之数的神秘外衣被完全剥脱。

第七章 《周易》的科学意义

对于《周易》这部古典，历来仁者见仁，智者见智。犹如观看一场精采的杂技表演，一般观众为演员的惊险动作喝彩，而力学家欣赏的则是演员实际掌握各种力学原理的能力。巫师方士把《周易》作为占筮的迷信工具，哲学家则潜心探求其哲学奥义，历史学家要从中了解产生它的那个时代的社会，科学家致力于发现其中的科学含义。所以梁启超称《周易》为“数理哲学”，而莱布尼茨则称它为“最古老的科学”。

《周易》对中国传统文化和思想所产生的巨大影响是人所共知的。但是它在中国科学发展史上的地位至今未得到公认。汉代扬雄和宋代邵雍改造了《周易》的符号体系，却被传统易学家斥为“非易”。唐代天文历法家一行和宋代数学家秦九韶把《周易》和历法、数学联系起来，也被评论为“故弄玄虚”，使科学“神秘化”。但是，仍然有少数科学家不断尝试着探索《周易》的科学意义。把《周易》视为与科学完全无关，或者把它说成万学之源，都过于偏颇。人们今天已经习惯于从陶器、指南车、编钟、赵州桥等出色的技术发明中了解古人在实践中掌握科学原理的情况，为什么不可以从各种图形、数字

游戏去了解古人在思维实践中掌握科学原理的情况呢？相对于技术发明这种“实践技术”，我们可以把《周易》叫做“思维技术”。我们应当象研究古代实践技术一样，把古代思维技术作为科学史研究对象。正象实践技术作为科学发展的前科学形态，思维技术也是科学发展的前科学形态。从科学史的角度看，《周易》，根据已经取得的研究成果，是一部前科学著作。它对中国的传统医学、天文历法和数学的发展作出了贡献。

第一节　作为前科学的《周易》

1983 年 9 月，笔者在中国第三次科学哲学讨论会上，曾从发生学的角度提出科学发展的四个阶段：潜科学阶段(subscientific stage)、前科学阶段(prescientific stage)、科学阶段 (scientific stage) 和后科学阶段 (postscientific stage)。① 潜科学是没有理论形态和经验基础的科学形态。前科学是科学的形而上学形态，它具有某种理论形态，构成一定的公理集。科学是在某种程度上比较完备的理论系统，并能被经验检验。后科学是对科学本身的哲学反思。不仅科学作为整体有这四个发展阶段，而且每一门科学、每一个科学理论的发展都重演这个完整的过程。我们所讨论的《周易》就是这样意义上的前科学。

《周易》无疑具备理论形态，它是概念和符号紧密结合的、

① 见邱仁宗的报道：On the therd conference on phylosophy of science in China, Ratio, vol.26, No.2, P.199—230(1984)。

合乎逻辑的理论系统。在这本小册子里，我们着重分析了其符号系统的数学结构，阐明了它的内在的逻辑性。当然不能说有数学结构的东西本身就是这结构的数学。某种自然物有数学结构，我们不能说它是数学。但是人工物和自然物不同，任何人工物都是经过人的手和脑的加工的产物，任何人工产物的数学结构都凝结着人的思维的成果。《周易》这个古人思维的精巧产物的数学结构是科学的前科学形态。我们关于它的几何的、代数的、群论的、数论的各种分析，已经揭示了它的符号系统的逻辑结构的数学方面。在这里，我们再从符号系统和概念的对应进一步探讨它的前科学性。

一、阴 阳 原 理

《周易》区分两种对立的性质阴阳，并记之以符号⚊和⚋。阳代表一种积极的力量，阴代表一种消极的力量。阴阳是一种极为概括的概念。例如君阳臣阴，父阳子阴，男阳女阴，夫阳妻阴，表阳里阴，南阳北阴，夏阳冬阴，日阳月阴，火阳水阴，山阳泽阴，天阳地阴，风阳雷阴……。

卦之阴阳

一卦由阴爻⚋和阳爻⚊各若干组成。若一卦包括一个阳爻两个阴爻，则此卦为阳；反之一阴二阳卦为阴卦。所以阳卦多阴，阴卦多阳，以少主多。

例如八卦

阳卦　☰　☳　☵　☶

阴卦　☷　☴　☲　☱

其他各卦系的卦之阴阳都依法决定。

爻位之阴阳

卦爻之序自下而上为初、二、三、四……上。初、三、五……等奇数为阳位，二、四、六……等偶数为阴位。图 7.1.1 为六爻卦阴阳位的示意图。余可类推。

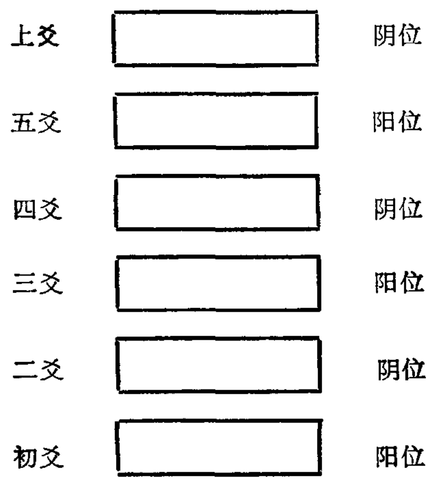


图 7.1.1　爻位阴阳图

阴阳之老少

不但卦有阴阳，阴阳又分老少。例如，八卦，有

老阳　☰　　少阳　☶　☵　☳

老阴　☷　　少阴　☴　☲　☱

阴阳之老少代序可以类推。对于任何 r 级卦系，除老阴(纯阴)、老阳(纯阳)卦外，设阴阳爻之比 $p/q=K$，则 $K<1$ 的卦为阳性，而 $K>1$ 的为阴性。

阴阳卦老少的代序亦由 K 值判断，阳卦的代序为 K 增的方向，阴卦的代序为 K 减的方向。且子代的卦数多于父代。

各代阴卦的数目 N_{qi} 和阳卦的数目 N_{pi} 可以分别由

$$N_{qi}=C_{qi}^{r} \quad 和 \quad N_{pi}=C_{pi}^{r}$$

计算。图 7.1.2 是六十四卦系阴阳老少的代序图。

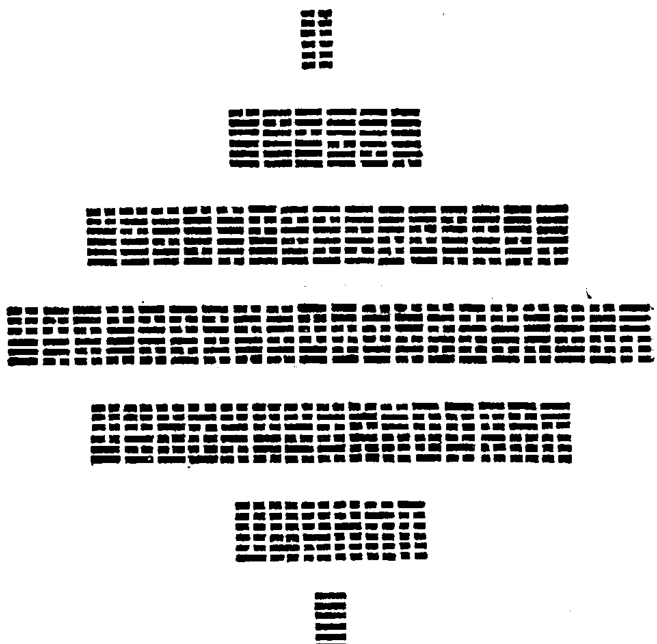


图 7.1.2　阴阳老少代序图

阴阳之性

阳性代表积极，阴性代表消极。在《周易》中的许多具体说法表明：阳性动，阴性静；阳性刚，阴性柔；阳性上，阴性下。

阴阳定律

阴阳定律我们已经在第五章中作了专门的讨论。这里我们重列三个定律的公式

守恒律　$p+q=r$

平衡律　$P=Q=\frac{1}{2}2^r\cdot r$

置换律　$N=C_q^r=\frac{r!}{p!\,q!}=C_p^r$

二、生 成 原 理

《周易》阐明了事物由简单到复杂的无限生成过程。

阴阳之体用

阴阳对立谓之易之体，阴阳互变谓之易之用。生与逝，动与静，消与息，明与幽的对立都是易之体；而生缘于逝，动缘于静，消缘于息，明缘于幽都是易之用。也就是说对立是本质，变化是属性，所以体是第一性的，用是派生的。《周易》的所谓“生生之谓易”，就是说事物都基于阴阳对立和阴阳相生而产生千变万化。所以易体指的是阴阳的对立，易用指的是阴阳的流行。

体用可以用变量 n 和其函数 $f(n)$ 来表示，n 是体，$f(n)$ 是用。$f(n)$ 随 n 的阴阳和多少而千变万化，所以生成基于阴阳的增减和反演两种基本变化。我们在前几章关于易图数学结构的各种分析就是探讨 $f(n)$ 的具体形式。

增殖生成

太极、两仪、四象、八卦……这个无穷的卦系列，表示宇宙生成发展从简单到复杂的无限过程。宇宙从无体、无象、无时的一切都不可区分的混沌产生出阴阳二气，接着由于阴阳变化而呈现春夏秋冬四时，继而出现天地山泽水火风雷八种基本自然现象，……

这种生成的方式的符号形式就是邵雍式的卦系衍生图，如图 2·1·8 六十四卦衍生横图。第三章第三节所给出的二项式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k y^{n-k}$$

是这种生成的代数表示。在第四章的第二节我们又从群论的角度讨论了由阴阳两个元素如何生成各种卦系的问题。这种生成是阴阳爻的一分为二的增殖，如图 2.1.7，我们把它称之为增殖生成。

反演生成

任何一 r 级卦系系内诸卦又有其生成次序。《周易》所谓“乾坤为父母”，就是由乾坤两卦可以生成该卦系所有可能的卦之一种拟人的说法。这种在同一卦系内的诸卦之生成，不同于卦序列的生成。

《周易》的所谓“阴阳相生”其最根本的意义是阴阳反演。任何 r 级卦系的乾卦或坤卦，通过反演变换可得出该卦系的全部卦。图 7.1.3 为六十四卦的阴阳相生图。自上而下，最上为乾卦，其下各行为其反演所生。乾卦之一爻反演生成第二行六卦，两爻反演生成第三行之十五卦，三爻反演生成第四

行之二十卦，四爻反演生成第五行的十五卦，五爻反演生成第六行的六卦，六爻皆反演生成坤卦。如果自下而上看则是坤卦反演的生成过程。其实通过第四章《易对称群》的讨论已知，系内各卦都可以通过适当的反演相互生成。

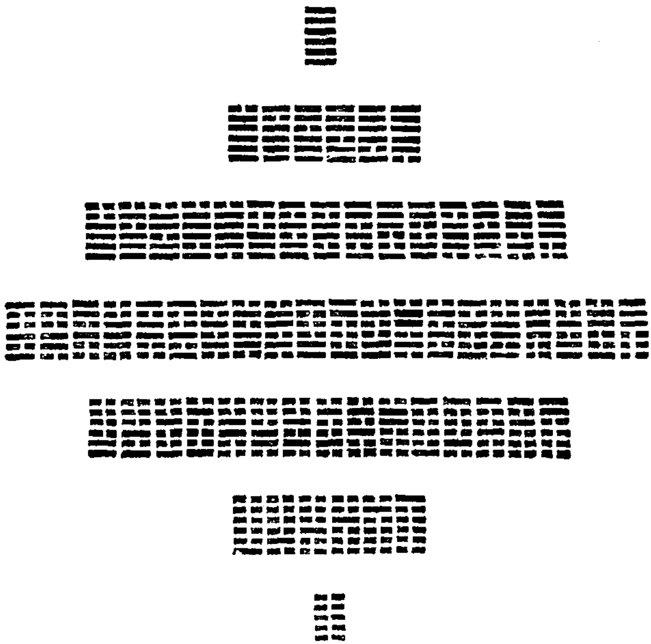


图 7.1.3 阴阳相生图

互体生成

所谓“互体”是以一卦的中四爻（二、三、四、五爻）的下三爻（二、三、四爻）为下体，而上三爻（三、四、五爻）为上体组成一个新卦，这新卦叫作原卦的互体卦。例如䷢之互体为䷚。也可推广为上三爻为下体，下三爻为上体，以及其他方式。除

乾、坤两卦的互体卦是它本身以外，每卦都有其互体卦，且任何互体卦都逃不出六十四卦之范围。但若干卦可能生成同一个互体卦，如 三卦的互体卦都是 ，其规律在于其中四爻相同的卦有共同的互体卦。图 7.1.4 是以第二种方式构成的三对一的六十四卦互体图。这个图并未穷尽互体关系，还有四对一的互体卦，如 的互体卦为 ，这样的四对一的互体卦有十二卦。但由六十四卦组成的互体卦只能有十六卦，就是图 7.1.4 所示的那十六卦。这是因为中四爻的阴阳排列只能有十六种。四阴和四阳各一种，一阴三阳和一阳三阴各四种，二阴二阳六种。

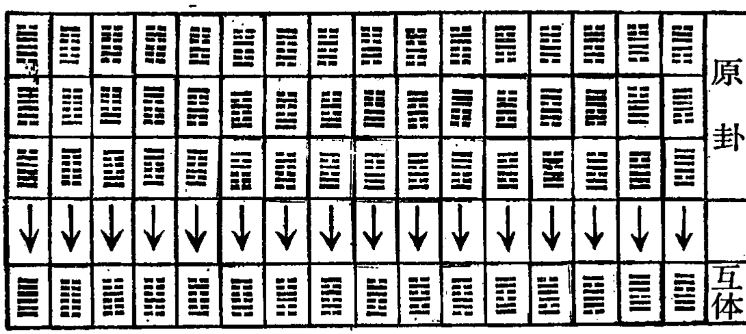


图 7.1.4 六十四卦互体图

机遇生成

按大衍成卦法，五十策蓍草经奇一二分和一挂二扐得九、八、七、六四数决定一爻，得六爻成一卦。这爻之得和卦之成完全是一种机遇行为。这样得一爻四营数之一的几率为$\frac{1}{4}$，得

一由四营数决定的可能卦之一的几率为$\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{1}{4096}$。

三、配 位 原 理

《周易》以阴阳配位的概念刻画事物状态的正常和异常。"位"是指爻位，从下而上奇数位为阳位，偶数位为阴位，且下卑上尊。阳居阳位，阴居阴位为正位；阴居阳位，阳居阴位为不正。

卦有皆当位者和皆不当位者，有的几爻当位几爻不当位，

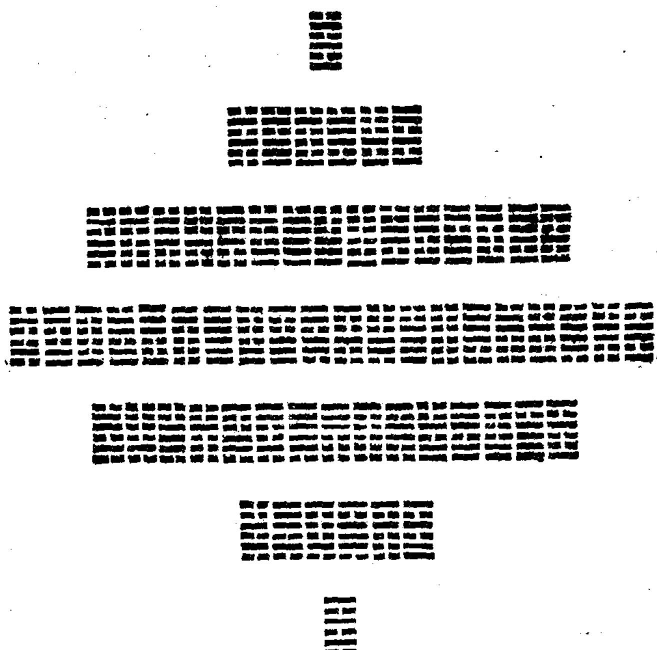


图 7.1.5 六十四卦位布图

对任何卦系，皆当位和皆不当位者各一卦。图7·1·5为六十四卦位布图。从图可见最上行之卦䷾(既济)为皆当位者，最下行之卦䷿(未济)为皆不当位者，其余为数爻当位数爻不当位者。五爻当位一爻不当位及一爻当位五爻不当位者各六卦，四爻当位二爻不当位及二爻当位四爻不当位者各十五卦，三爻当位三爻不当位者二十卦。

四、关　系

乘承比应

《周易》规定了爻与爻之间的关系为“乘承比应”。对任何相邻两爻之间，上爻对下爻曰“乘”，下爻对上爻曰“承”，相互之间曰“比”。“应”指内外卦相应爻之间的关系，例如六十四卦的内卦上中下三爻与外卦上中下三爻，同性谓之“敌”，异性谓之“应”。“应”意为阴阳相求，“敌”意为排斥。图7.1.6为六十四卦敌应关系图。

错综关系

卦与卦之间的关系有交错和交综。关于错综关系，我们已经在第二章的第二节和第三节中讨论过了，这里不再赘述。

五、符号表示系统

《周易》的上述“原理”，不但提供了一个形而上学的理论框架，而且提供了一个符号表示系统。这些原理实际上成为我国古代人整理自然、社会和思维知识的理论框架和表示系

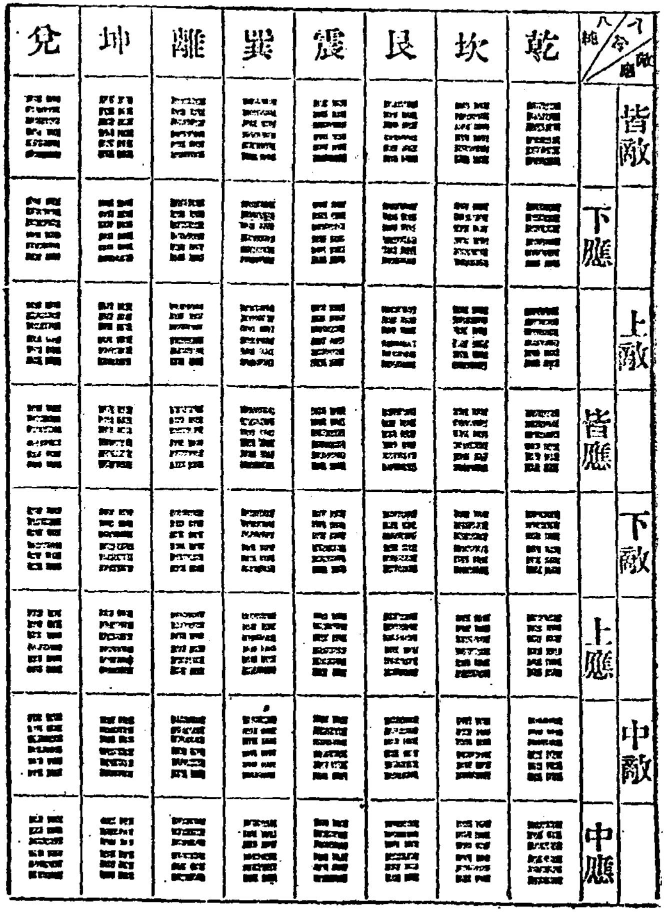


图 7.1.6 六十四卦敌应关系图

统。阴阳概念是我国医药学的理论基础的核心概念，以它为基础建立起生理和病理的理论体系和八纲辨治（阴阳、表里、虚实、寒热）原则。在作为化学前驱的炼丹术中，不但借用了《周易》原理，而且利用了它的符号，这特别表现在东汉魏伯阳的《周易参同契》中。六十四卦用于表示时令与气候，以坎、离、震、兑分主四时，其余六十卦配十二个月，每月五卦，分别称辟卦、公卦、侯卦、大夫卦、卿卦，各辟卦代表各月。图 5.1.1 为十二辟卦图。

据《新唐书·历志》载唐代历法家一行《卦议》① 所言，《孟氏章句》始以十二消息卦表示十二月。京房又以卦配日，"坎、离、震、兑，其用事自分、至之首，皆得八十分日之七十三；颐、晋、井、大畜，皆五日十四分，余皆六日七分"。其后"皆因京房，惟《天保历》依《易通统轨图》"。一行认为京房的"减七十三分，为四正之候"欲附会纬书的"七日来复"。他认为当据孟氏，"自冬至初，中孚用事，一月之策，九六、七八，是为三十；而卦以地六，候以天五，五六相乘，消息一变，十有二变而岁复初"。现据《魏书·律历志》所载《正光历》为例略示易图在历法表示中的应用。② 它以坎、震、离、兑为四"正卦"，分别表示冬至、春分、夏至、秋分。六十四卦之其余六十卦为"次卦"，分配给十二个月。

十一月：未济、蹇、颐、中孚、复。

十二月：屯、谦、睽、升、临。

---

① 《历代天文历律等志汇编》(七)，中华书局 1976 年版，第 2180 页。

② 《历代天文历律等志汇编》(六)，第 1802—1803 页。

正月：小过、蒙、益、渐、泰。

二月：需、随、晋、解、大壮。

三月：豫、讼、蛊、革、夬。

四月：旅、师、比、小畜、乾。

五月：大有、家人、井、咸、姤。

六月：鼎、丰、涣、履、遯。

七月：恒、节、同人、损、否。

八月：巽、萃、大畜、贲、观。

九月：归妹、无妄、明夷、困、剥。

十月：艮、既济、噬嗑、大过、坤。

宋代邵雍利用六十四卦符号系统表示它的循环历史观。① 从科学的角度来看，它也是一个时间表示系统。他规定一元十二会，一会三十运，一运十二世，一世三十年，各配以卦。六十四卦除去乾、坤、离、坎四卦共六十卦，每卦当有六变卦，所以有三百六十变卦，邵雍用它们配一元之三百六十运，其顺序依六十四卦先天圆图，起于复，止于剥，称为运卦；运卦三百六十所变之卦二千一百六十，每卦管二世，配一元之四千三百二十世，称为世卦；世卦又一变为六十，而成一十二万九千六百变卦，配一元之十二万九千六百年，称为年卦。邵雍还以非常得体的图表表示这种计时系统。图 7.1.7 为邵雍之元会运世图之简化。

---

① 邵雍：《皇极经世》，王植刻本。

					甲 1	元	
	亥……… 12	丑 2			子 1	会	
癸……… 360 坤	甲……… 331 噬嗑	甲 31 晋	癸……丙 30……3 噬嗑…震	乙 2 明夷	甲 1 坤	运	
4309……	3961……	361	349……25	13	1	子	世
4310……	3962……	362	350……26	14	2	丑	
4311……	3963……	363	351……27	15	3	寅	
4312……	3964……	364	352……28	16	4	卯	
4313……	3965……	365	353……29	17	5	辰	
4314……	3966……	366	354……30	18	6	巳	
4315……	3967……	367	355……31	19	7	午	
4316……	3968……	368	356……32	20	8	未	
4317……	3969……	369	357……33	21	9	申	
4318……	3970……	370	358……34	22	10	酉	
4319……	3971……	371	359……35	23	11	戌	
4320……	3972……	372	360……36	24	12	亥	

图 7.1.7 元会运世图

第二节　从《周易》到“大衍求一术”

一、《周易》和历法

陈遵妫在其《中国天文学史》中提出“中国古代天文学是在《周易》哲学思潮影响之下发展起来的”的观点①，并且还讲到它和历法天文学的关系。我想进一步探讨这个问题。

《周易》或许想对历法表示和推算方法提出一种模式。这可以从本书第六章开头引自《系辞》的一段话来分析。

陈遵妫认为，其中“五岁再闰”一句指五年设置两个闰月，三百六十策表示一年的日数，六十四卦代替星座。他说这并不表明当时不知道一年的日数是三百六十五又四分之一日和十九年七闰月的方法，而是概略的说法。

如果断定《系辞》为战国中后期的作品②，因为在战国末期各派历法都采用十九年七闰的闰周和三百六十五又四分之一日的回归年③，那么《系辞》的作者不会不知道，因此我们应该换个角度来探讨它。笔者觉得《系辞》在这里提出的是一种便于干支记日法的编历系统。这个系统是每年历日三百六十天，每月历日三十天，每五年置闰月一次。《系辞》作者之所以这样做，可能是企图把历法纳入六十四卦系统，用六十四卦的符号系统表示历法。

① 陈遵妫：《中国天文学史》第一册，上海人民出版社 1980 年版，第 94 页。

② 张岱年：《中国哲学发微》，山西人民出版社 1981 年版。

③ 钱宝琮：《从春秋到明末的历法沿革》，载《钱宝琮科学史论文集》，科学出版社 1983 年版。

西汉末年，扬雄作《太玄》。我们已经在第一章的第二节《易学源流》和第三章的第一节《二进制解释》中阐明了，它的符号系统是三进制数表。在这里我们要介绍一下扬雄把它的《太玄》和历法对应的一些观点。他企图用他的八十一首来表示历法。例如他把每首分为九赞，八十一首共七百二十九赞，每两赞代表一日，一赞为昼，一赞为夜，共三百六十四日半，更加“踦赢”二赞，表示一年的日数。他还根据他的《太玄》图把一年季节分为九段，名为九天。他认为他这套：“与泰初历相应，亦有颛顼之历焉”。其文晦涩难懂，但东汉天文学家张衡曾极为推崇，认为《太玄》之学二百年后必兴。在未进行深入研究之前，不敢多加评论。

西汉末历法家刘歆作《三统历谱》，极力想把历法建立在易学理论的基础上。古人已经批判过，认为刘歆“以《春秋》、易象推合其数，盖傅会之说”①。制订历法的根据来自天文观测，绝不是从先验观念推论出的。但是经验材料需要以一定的理论框架来整理。六十四卦符号系统具有一定的逻辑功能，刘歆的工作除了“傅会”之外，是否还有利用六十四卦作为历法表示系统的成功之处，有待进一步研究。

唐代天文历法家一行的《历本议》一直被认为是附会《周易》的象数语言②。笔者则认为《历本议》旨在阐明以《周易》的概念和符号系统表示历法。这段二千一百字左右的文字③很

① 《新唐书·历志一》。
② 钱宝琮：《从春秋到明末的历法沿革》。
③ 《新唐书·历志三上》。

值得研究。从科学的角度看，它是企图把演绎法和观测结合起来。由于我们对易图数学结构的分析，特别是第六章《易同余式》和本章第一节《作为前科学的〈周易〉》的分析，对《周易》的演绎体系是不难理解的，因而对于一行把他的历法命名为"大衍历"也是不难理解的。即使其中有些附会之处，也是可以通过研究剔除糟粕保留精华的。当代已经有人注意到《周易》象数推演的演绎特征，并认为在宋代它为演绎法的应用打开了一道广阔的观念认识之门，认为秦九韶的《求一术》、蒋周的《益古》、李文一的《照誉》、刘汝楷的《如积释锁》、李德载的《两仪群英集》、刘大监的《乾坤括囊》等著作都受到它的深刻影响①。

《周易》筮法具有同余式数学结构，而自汉以来历法上元积年计算也是一个一次同余式问题，由此可见《周易》同历法的关系不只是形式表示的问题，还有数学方法上的根源。只不过由于长期以来筮法的同余式结构一直未被揭示，前人论述历法、数学和《周易》关系的话往往被视为附会。现在筮法同余式结构既然已经探明，这些问题也应当重新考释。

二、易同余式和大衍求一术

同余式问题最早以迷信筮法形式出现，这我们已经在第六章《易同余式》中讨论过了。同余式问题接着又在历法上元积年的计算中出现。上元积年N的计算由下列同余式决定

① 刘载锋：《宋代早期哲学对科学发展的影响》，载《科学传统与文化》，陕西科学技术出版社1983年版。

$$aN \equiv R_1 \pmod{60}$$
$$\equiv R_2 \pmod{b}$$

其中 a 为回归年日数，b 为朔望月日数，60 为干支周期，R_1 为本年冬至距甲子日零时的日数，R_2 为冬至距十一月平朔的日数。同余式问题作为正式的数学问题出现在《孙子算经》中。

《孙子算经》中有一题曰"今有物不知其数。三、三数之，剩二；五、五数之，剩三；七、七数之剩二。问物几何？"用现代同余式理论写出来就是

$$N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$$

它的一般形式是

$$N \equiv R_i \pmod{m_i}$$

《孙子算经》只是给出这个具体问题的解法，没有提出一般原理。术曰："三、三数之，剩二，置一百四十；五、五数之，剩三，置六十三；七、七数之，剩二，置三十。并之，得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三、三数之剩一，则置七十；五、五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。"明代程大位的《算法统宗》(1593 年)把这种解法编成一首歌：

三人同行七十稀，
五树梅花廿一枝，
七子团员整半月，
除百零五便得知。

这首歌用现代数学方式写出来便是

$$x \equiv 70a + 21b + 15c \pmod{105}$$

南宋数学家秦九韶在其《数书九章》（1247 年）中提出“大衍求一术”。大衍求一术所列各类问题，都可归结为 $N \equiv R_i \pmod{m_i}$ 之类的同余式问题。

秦九韶的大衍总术包括“求等”、“求定母”、“求衍母”、“求衍数”、“求奇数”、“求乘率”、“求用数”和“求总数”的步骤。具体算法本书从略。

总之，不管是朱熹的演法还是秦九韶的演法，其中的数学问题都是同余式问题。也就是说，我们证明了《周易》筮法的数学结构和秦九韶的大衍术要解决的问题是同类。

秦九韶在其《数书九章》序中说：

> 今数术之书尚三十余家，天象历度谓之缀术，太乙壬甲谓之三式，皆曰内算，言其秘也。九章所载，即周官九数。系于方圆者为叀术，皆曰外算，对内而言也，其用相通，不可岐二。独大衍法不载九章，未有能推之者，历家演法颇用之，以为方程者，误也。且天下之事多矣，古之人先事而计，计定而行，仰观俯察，人谋鬼谋，无所不用其谨，是以不愆于成，载籍章章可覆也。后世兴事造始，鲜能考度，浸浸乎天纪人事之殽缺矣，可不求其故哉。

这段话以及他把《周易》筮法作为第一个例题，足以表明其大衍术来源于筮法和历算。秦九韶将其术冠以“大衍”之名，意在表明它的渊源，而“数与道非二本”的总结是他这一创造的切身经验。

如果说邵雍的“加一倍法”（即连续加重法）作为重复排列

问题，为十一世纪的中国数学史增添了新的内容，那么秦九韶分析筮法创立大衍术就应当给予更高的评价。过去由于没有对筮法作现代数学分析，因而未能理解秦九韶创造的思路，现在他的“附会《周易》”之嫌可以澄清了。

第三节　论真理的再发现

人类的思想发展往往表现出向古代思想的某种归复。这是事物和思想发展螺旋上升规律的表现。恩格斯在《自然辩证法》中曾经写到：

> 如果说，在细节上形而上学比希腊人要正确些，那么，总的来说希腊人就比形而上学要正确性。这就是我们在哲学中以及在其他许多领域中常常不得不回到这个小民族的成就方面来的原因之一，他们的无所不包的才能与活动，给他们保证了在人类发展史上为其他任何民族所不能企求的地位。而另外一个原因则是：在希腊哲学的多种多样的形式中，差不多可以找到以后各种观点的胚胎、萌芽。因此，如果理论自然科学想要追溯自己今天的一般原理发生和发展的历史，它也不得不回到希腊人那里去。而这种见解愈来愈为自己开拓道路。有些自然科学家一方面把希腊哲学的残渣，例如原子论，当作永恒真理，另一方面却以培根式的傲慢去看希腊人，理由是他们没有经验自然科学，这样的自然科学家是愈来愈少了。现在唯一希望的是这种见解迈步前进，达到对希腊

哲学的真正认识。①

恩格斯的这段话是对希腊古典哲学的一个正确的历史评价。然而，一百多年后的今天，一些学者把目光转向了中国古典哲学。实际上，不少人已经象恩格斯对于古希腊哲学的评价那样看待中国古典哲学了。例如，量子力学哥本哈根学派的尊师 N·玻尔(1885—1962)认为量子论的认识论问题，在中国哲学家老子那里早已碰到了，他一生反复阐述的并协观念在中国也有它的先河。他亲自设计的自己家族的族徽，把太极图作为图案的核心，象征“并协”。又如，美国当代物理学家 J·A·惠勒认为中国传统文化有他的质朴原理的先河。1981 年 10 月，他来中国讲学，介绍他的物理学质朴原理。中国科技大学方励之教授将他的演讲汇编成《物理学和质朴性》一书(1982 年由安徽人民出版社出版)。编者的话中有这样一段关于惠勒对中国文化见解的叙述：

> 惠勒说，他之所以敬佩中国的传统，不单在于中国的长城箭垛、帝王陵寝、佛塔古寺等看不尽的物质上的历史陈迹，更在于中国的许多伟大思想家所留下的精神宝库。惠勒在每次讲演中，几乎都要提到 1937 年春玻尔对中国的访问。那次访问使玻尔发现他那时所倡导的并协原理，竟然在中国古代文明中就有它的先河，他认为“阴阳”图是并协原理的一个最好的标志。这一次，惠勒也亲自体验到了。一天傍晚，我们一同看根据《封神演义》中的故

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 30—31 页。

事改编的舞剧《凤鸣岐山》，当我们告诉他智者姜子牙手中指挥一切的“無”字旗的“無”字含义是“NOTHING”时，惠勒兴奋极了，一定要记下“無”这个字样。原来，他近年正倡导“质朴原理”，即物理学是从几乎一无所有达到几乎所有一切，没有想到，这种科学哲学观，竟也在中国的古代思想中找到了他的前驱。

这种情况的出现，完全是由于处在科学发展现阶段的科学家们寻找世界观启发的努力，而不是由于什么一时的感情冲动。美国高能物理学家F·卡普拉，1975年出版了一本书，叫作《物理学之道》，把现代物理学和东方哲学思想作了对比，企图说明东方学问的精神和西方的有一个基本的一致。人所共知，现代物理学的发展导致了在宇宙观上的深刻的变化。古典物理学的机械论的世界观对于描述我们在日常生活中所碰到的现象，对于处理同日常环境有关的物理现象是适用的。在二十世纪，关于原子和亚原子世界的探究已经表明，我们的许多基本观念要改变，如物质、时间、空间和因果关系等概念在亚原子领域是完全不同于古典物理学中的思想的。这些概念是非常基本的，以致随着它的根本变化，我们的整个世界观都得改变。卡普拉认为，过去数十年间现代物理学引起的这些变化已经被物理学家们所讨论，虽然不很充分，但好象已一致走向了一个类似东方的世界观：宇宙的全部现象是一个不可分离的和谐的整体。他在这本书中专门讨论了中国古典哲学某些思想和现代物理学概念的类似。他阐述了中国哲学中“道”和“气”的概念包含着现代物理学“场”的观念。“道”作为

虚空和混沌可以产生一切形式；“气”就象量子场，它不只是物质的基本要素，而且还以波的形式传递相互作用。他把量子场同《易经》作了对比，认为《易经》把运动和变化视为事物本身所固有的观点同基本粒子的相互作用和转化的动力学模型一致，而且八卦图也同强子的八重态对立。美国的R·A·尤里达1975年在《美国物理学杂志》(第43卷第2期)上发表的《中国古代的物理学和自然观》中也说：

> 现今的科学大厦不是西方的私有成果和财富，也不仅仅是亚里士多德、欧几里得、哥白尼和牛顿的财产——其中也有老子、邹衍、沈括和朱熹的功劳。如果中国科学独立发展，我们不知其情景将会如何。但是，我们可以说，当今科学所选择的某些方向，统一整体世界观的某些方面具有中国的(而非别国的)的特点。中国自然哲学和中国科学求索千年的主旨在于把有机的统一性、自发性、有序性、和谐相关性作一完整的理解。

我们现在引用一个或许是非常有趣的例证来说明，当代科学家选择的某些方向和中国古代哲学思想的某种一致性。方励之教授在《“第一推动”今昔谈》① 的文章里介绍了物理学家关于宇宙创生于无的物理学理论。物理学的发展要求物理学研究存在本身了，特别是天体物理学，现在已经被逼到非解决宇宙开端问题不可的地步。在亚里士多德的著作中就已提出了“有一个不被任何别的事物推动的第一推动者”的命题，

① 《自然辩证法通讯》1984年第4期，第41页。

在中世纪托马斯·阿奎那把“第一推动者”说成是上帝，于是“第一推动”成了他的神学体系的基石。当牛顿把他的力学用于宇宙时，由于无法回答运动的最早的初始条件，也不得不回到“第一推动”。为了回避“第一推动”而设想宇宙在时间上是无限的，但大爆炸宇宙学研究表明，现今的宇宙很可能是在有限的时间内发展起来的，也就是存在着宇宙的开端。整个宇宙的演化决定于开端的运动状态，它就是宇宙的初始条件。这个开端的初始条件是由什么决定的呢？为了不致陷入阿奎那或牛顿的超自然的“第一推动”，就必须给出宇宙开端的物理机制。十八世纪，休谟为了抛开上帝，曾提出“物质世界本身就包含着物质世界秩序的原则”的命题。这就是说，宇宙的初始条件是由宇宙本身决定的，没有任何东西存在于宇宙之外。没有任何东西能给出宇宙的开端。所谓“没有任何东西”，意即“无”；所谓“宇宙的开端”，意即“宇宙的创生”。上述的陈述可以等价地陈述为：无能给出宇宙的创生。自 1982 年在英国剑桥大学召开的一次极早期宇宙讨论会之后，人们开始重视“宇宙从无创生”的所谓宇宙自足理论。宇宙自足理论的研究是从时空如何从无创生入手的，那空间和时间是从没有空间也没有时间的状态产生的。剑桥大学的霍金教授自 1983 年以来致力于发展一种宇宙自足理论，1984 年他和他的中国合作者吴忠超一起得到了第一个完整的宇宙自足解。他们的理论虽然是就最简单的情况作了定量计算，还不能算是真实的宇宙解，但是它的重要意义在于，建立宇宙创生的自足理论是很可能的，宇宙创生问题成了经验自然科学的课题。

现代物理学家的研究方向同中国古代思想家们的某些思想如此相近，似乎表明中国古典哲学中包含着今日科学思想中的许多萌芽。因此，中国古典哲学是否可以为现代自然科学的发展提供有益的哲学启示，就成为值得重视的研究课题。

历来哲学同自然科学存在着密切关系。在古代，人类只有一门总括的知识，就是哲学。就欧洲而论，到亚里士多德时代，哲学才开始分化，出现了自然学(关于自然的知识)、伦理学(关于社会的知识)和逻辑学(关于思维的知识)三个主要分支。自然学进一步发展，又分化出分门别类研究自然各个领域的分科之学，于是以数学方法和实验方法相结合的严密的经验自然科学在近代诞生了。随着近代科学的诞生，自然学中把自然界作为整体来研究的思想延续下来，而成为同自然科学相脱离的“自然哲学”。自然科学的发展，一方面促成哲学产生反思辨形而上学的倾向，另一方面也使得自然科学内部产生了认识论的变革，从而冲破了哲学同自然科学分离的思想，开拓了两者结合的新道路。这大约发生在十九世纪后半叶。所以，从自然科学发生和发展的历史看，自然学（古代哲学的一部分）就是前科学。同自然科学密切结合的现代科学哲学，除了保留自然学的前科学性和整体性外，还有后科学性。

那么，作为前科学的自然学是否就随着自然科学的发展失去了意义，而成为一种历史的陈迹呢？不！人类知识的奇妙之处在于“温故而知新”。伟大的科学家爱因斯坦（1879—1955)曾经说过一段话，对于我们所讨论的问题很有启发：

事物的这种真理必须一次又一次地为强有力的性格的人物重新加以刻勒，而且总是使之适应于雕像家为之工作的那个时代的需要；如果这种真理不总是不断地重新创造出来，它就会完全被我们遗忘掉。①

回想一下古希腊原子论引入近代科学之后给科学带来的巨大推动力，我们将会深刻理解爱因斯坦这段话对我们的论题的意义。古希腊学者德谟克利特（前460—前370）和卢克莱修（前99—前55）发展起来的原子论，经中世纪的冷落之后，在十七世纪由于哲学家伽桑狄（1592—1655）的提倡而在近代科学中复活。但是，起初科学家们沿用了古原子论的单质原子概念，以致一百多年没有取得本质的进展。到了十九世纪初，道尔顿(1766—1844)根据实验事实把原子概念从单质原子改造为元素原子，才确立了原子论的科学地位，成为科学的物质概念的基础，在此基础上发展出现代原子科学。量子力学创建人之一，海森伯(1901—1976)在谈到量子论和原子科学的渊源时曾说过这样一段话：

古代哲学的若干陈述还是颇接近于现代科学的那些陈述。这只是表明，将我们未曾做过实验就具有的关于自然的日常经验，同在这种经验中寻求某种逻辑秩序以便根据普遍原理来理解这种经验的不懈努力相结合，人们能到达怎样的境地。②

在现代自然科学发展趋向似乎在某种程度上要求回到中

---

① 《爱因斯坦文集》第1卷，商务印书馆1976年版，第84页。

② 海森伯：《物理学和哲学》，商务印书馆1981年版，第37页。

国古代人的自然观的情况下，为了促进自然科学的发展，我们面临着一个“重新创造”真理的任务。

重新创造真理需要严肃的科学态度，绝不是把古典著作中的某些概念和现代自然科学术语作简单的类比所能做得到的。作者在这本小册子中的努力，是对于易学的真理再发现的一个尝试。作者希望关于易图数学结构的一些结论能够为寻求《周易》对现代自然科学的哲学启示提供一点线索。